

2011 年 度

前 期 日 程

数 学 問 題

(理系)

〔注 意〕

1. 問題冊子および解答用冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはいけない。
2. 受験番号は，解答用紙の受験番号欄（計 10 か所）に正確に記入すること。
3. 問題本文が脱落している場合は直ちに申し出ること。
4. 解答用冊子には表紙 1 枚と解答用紙 5 枚と白紙 2 枚が一緒に折り込まれている。解答用紙をミシン目に従って切り離すこと。
5. 解答（途中の計算，推論等を含む）は，指定された解答用紙の指定された場所に記入すること。指定された解答用紙の指定された場所以外に記入した解答は無効とする。
6. 問題冊子の余白は下書きに使用してもよい。
7. 解答用紙は持ち帰ってはいけない。
8. 問題冊子，および解答用冊子の表紙・白紙は持ち帰ること。

(下書き用紙)

(下書き用紙)

1 a を自然数とする． O を原点とする座標平面上で行列 $A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ の表す 1

次変換を f とする．

(1) $r > 0$ および $0 \leq \theta < 2\pi$ を用いて $A = \begin{pmatrix} r \cos \theta & -r \sin \theta \\ r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$ と表すとき， r ， $\cos \theta$ ， $\sin \theta$ を a で表せ．

(2) 点 $Q(1, 0)$ に対し，点 Q_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を

$$Q_1 = Q, \quad Q_{n+1} = f(Q_n)$$

で定める． $\triangle OQ_nQ_{n+1}$ の面積 $S(n)$ を a と n を用いて表せ．

(3) f によって点 $(2, 7)$ に移されるもとの点 P の x 座標の小数第一位を四捨五入して得られる近似値が 2 であるという．自然数 a の値を求めよ．またこのとき $S(n) > 10^{10}$ となる最小の n の値を求めよ．ただし $0.3 < \log_{10} 2 < 0.31$ を用いてよい．

(配点率 20 %)

2 実数 θ が動くとき， xy 平面上の動点 $P(0, \sin \theta)$ および $Q(8 \cos \theta, 0)$ を考える． θ が $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，平面内で線分 PQ が通過する部分を D とする． D を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ．

(配点率 20 %)

(下書き用紙)

3

実数の組 (p, q) に対し, $f(x) = (x - p)^2 + q$ とおく.

- (1) 放物線 $y = f(x)$ が点 $(0, 1)$ を通り, しかも直線 $y = x$ の $x > 0$ の部分と接するような実数の組 (p, q) と接点の座標を求めよ.
- (2) 実数の組 $(p_1, q_1), (p_2, q_2)$ に対して, $f_1(x) = (x - p_1)^2 + q_1$ および $f_2(x) = (x - p_2)^2 + q_2$ とおく. 実数 α, β (ただし $\alpha < \beta$) に対して

$$f_1(\alpha) < f_2(\alpha) \quad \text{かつ} \quad f_1(\beta) < f_2(\beta)$$

であるならば, 区間 $\alpha \leq x \leq \beta$ において不等式 $f_1(x) < f_2(x)$ がつねに成り立つことを示せ.

- (3) 長方形 $R: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$ を考える. また, 4点 $P_0(0, 1), P_1(0, 0), P_2(1, 1), P_3(1, 0)$ をこの順に線分で結んで得られる折れ線を L とする. 実数の組 (p, q) を, 放物線 $y = f(x)$ と折れ線 L に共有点がないようなすべての組にわたって動かすとき, R の点のうちで放物線 $y = f(x)$ が通過する点全体の集合を T とする. R から T を除いた領域 S を座標平面上に図示し, その面積を求めよ.

(配点率 20 %)

(下書き用紙)

4 a, b, c を正の定数とし, x の関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ を考える. 以下, 定数はすべて実数とする.

(1) 定数 p, q に対し, 次をみたす定数 r が存在することを示せ.

$$x \geq 1 \text{ ならば } |px + q| \leq rx$$

(2) 恒等式 $(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 - \beta^3$ を用いて, 次をみたす定数 k, l が存在することを示せ.

$$x \geq 1 \text{ ならば } \left| \sqrt[3]{f(x)} - x - k \right| \leq \frac{l}{x}$$

(3) すべての自然数 n に対して, $\sqrt[3]{f(n)}$ が自然数であるとする. このとき関数 $f(x)$ は, 自然数の定数 m を用いて $f(x) = (x + m)^3$ と表されることを示せ.

(配点率 20 %)

(下書き用紙)

5 正数 r に対して, $a_1 = 0$, $a_2 = r$ とおき, 数列 $\{a_n\}$ を次の漸化式で定める.

$$a_{n+1} = a_n + r_n(a_n - a_{n-1}) \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

ただし a_n と a_{n-1} から漸化式を用いて a_{n+1} を決める際には硬貨を投げ, 表がでたとき $r_n = \frac{r}{2}$, 裏がでたとき $r_n = \frac{1}{2r}$ とする. ここで表がでる確率と裏がでる確率は等しいとする. a_n の期待値を p_n とするとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) p_3 および p_4 を, r を用いて表せ.
- (2) $n \geq 3$ のときに p_n を, n と r を用いて表せ.
- (3) 数列 $\{p_n\}$ が収束するような正数 r の範囲を求めよ.
- (4) r が (3) で求めた範囲を動くとき, 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ の最小値を求めよ.

(配点率 20 %)

