

# 入学試験過去問題

## 数 学

大阪大学（理系）

対象年度：2010 年

試験時間：150 分

問題数：5 問

## 第 1 問

関数

$$f(x) = 2 \log(1 + e^x) - x - \log 2$$

を考える．ただし，対数は自然対数であり， $e$  は自然対数の底とする．

- (1)  $f(x)$  の第 2 次導関数を  $f''(x)$  とする．等式

$$\log f''(x) = -f(x)$$

が成り立つことを示せ．

- (2) 定積分  $\int_0^{\log 2} (x - \log 2) e^{-f(x)} dx$  を求めよ．

## 第 2 問

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  とする. 2つの曲線

$$C_1 : x^2 + 3y^2 = 3, \quad C_2 : \frac{x^2}{\cos^2 \theta} - \frac{y^2}{\sin^2 \theta} = 2$$

の交点のうち,  $x$  座標と  $y$  座標がともに正であるものを  $P$  とする.  $P$  における  $C_1, C_2$  の接線をそれぞれ  $\ell_1, \ell_2$  とし,  $y$  軸と  $\ell_1, \ell_2$  の交点をそれぞれ  $Q, R$  とする.  $\theta$  が  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  の範囲を動くとき, 線分  $QR$  の長さの最小値を求めよ.

### 第 3 問

$\ell, m, n$  を 3 以上の整数とする. 等式

$$\left(\frac{n}{m} - \frac{n}{2} + 1\right)\ell = 2$$

を満たす  $\ell, m, n$  の組をすべて求めよ.

## 第 4 問

半径 3 の球  $T_1$  と半径 1 の球  $T_2$  が、内接した状態で空間に固定されている．半径 1 の球  $S$  が次の条件 (A), (B) を同時に満たしながら動く．

(A)  $S$  は  $T_1$  の内部にあるか  $T_1$  に内接している．

(B)  $S$  は  $T_2$  の外部にあるか  $T_2$  に外接している．

$S$  の中心が存在しうる範囲を  $D$  とするとき、立体  $D$  の体積を求めよ．

## 第 5 問

$n$  を 0 以上の整数とする．立方体 ABCD-EFGH の頂点を，以下のように移動する 2 つの動点 P, Q を考える．時刻 0 には P は頂点 A に位置し，Q は頂点 C に位置している．時刻  $n$  において，P と Q が異なる頂点に位置していれば，時刻  $n+1$  には，P は時刻  $n$  に位置していた頂点から，それに隣接する 3 頂点のいずれかに等しい確率で移り，Q も時刻  $n$  に位置していた頂点から，それに隣接する 3 頂点のいずれかに等しい確率で移る．一方，時刻  $n$  において，P と Q が同じ頂点に位置していれば，時刻  $n+1$  には P も Q も時刻  $n$  の位置からは移動しない．

- (1) 時刻 1 において，P と Q が異なる頂点に位置するとき，P と Q はどの頂点にあるか．可能な組み合わせをすべて挙げよ．
- (2) 時刻  $n$  において，P と Q が異なる頂点に位置する確率  $r_n$  を求めよ．
- (3) 時刻  $n$  において，P と Q がともに上面 ABCD の異なる頂点に位置するか，またはともに下面 EFGH の異なる頂点に位置するかのいずれかである確率を  $p_n$  とする．また，時刻  $n$  において，P と Q のいずれか一方が上面 ABCD，他方が下面 EFGH にある確率を  $q_n$  とする． $p_{n+1}$  を， $p_n$  と  $q_n$  を用いて表せ．
- (4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n}{p_n}$  を求めよ．

