

2010 年 度

前 期 日 程

# 数 学 問 題

(理系)

## 〔注 意〕

1. 問題冊子および解答用冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはいけない。
2. 受験番号は，解答用紙の受験番号欄（計 10 か所）に正確に記入すること。
3. 問題本文が脱落している場合は直ちに申し出ること。
4. 解答用冊子には表紙 1 枚と解答用紙 5 枚と白紙 2 枚が一緒に折り込まれている。解答用紙をミシン目に従って切り離すこと。
5. 解答（途中の計算，推論等を含む）は，指定された解答用紙の指定された場所に記入すること。指定された解答用紙の指定された場所以外に記入した解答は無効とする。
6. 問題冊子の余白は下書きに使用してもよい。
7. 解答用紙は持ち帰ってはいけない。
8. 問題冊子，および解答用冊子の表紙・白紙は持ち帰ること。

(下書き用紙)

(下書き用紙)

1

関数

$$f(x) = 2 \log(1 + e^x) - x - \log 2$$

を考える．ただし，対数は自然対数であり， $e$  は自然対数の底とする．

(1)  $f(x)$  の第 2 次導関数を  $f''(x)$  とする．等式

$$\log f''(x) = -f(x)$$

が成り立つことを示せ．

(2) 定積分  $\int_0^{\log 2} (x - \log 2) e^{-f(x)} dx$  を求めよ．

(配点率 20 %)

2

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  とする．2 つの曲線

$$C_1 : x^2 + 3y^2 = 3, \quad C_2 : \frac{x^2}{\cos^2 \theta} - \frac{y^2}{\sin^2 \theta} = 2$$

の交点のうち， $x$  座標と  $y$  座標がともに正であるものを  $P$  とする． $P$  における  $C_1$ ,  $C_2$  の接線をそれぞれ  $\ell_1$ ,  $\ell_2$  とし， $y$  軸と  $\ell_1$ ,  $\ell_2$  の交点をそれぞれ  $Q$ ,  $R$  とする． $\theta$  が  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  の範囲を動くとき，線分  $QR$  の長さの最小値を求めよ．

(配点率 20 %)

(下書き用紙)

3  $\ell, m, n$  を 3 以上の整数とする. 等式

$$\left( \frac{n}{m} - \frac{n}{2} + 1 \right) \ell = 2$$

を満たす  $\ell, m, n$  の組をすべて求めよ.

(配点率 20 %)

(下書き用紙)

4 半径 3 の球  $T_1$  と半径 1 の球  $T_2$  が、内接した状態で空間に固定されている．半径 1 の球  $S$  が次の条件 (A)，(B) を同時に満たしながら動く．

(A)  $S$  は  $T_1$  の内部にあるか  $T_1$  に内接している．

(B)  $S$  は  $T_2$  の外部にあるか  $T_2$  に外接している．

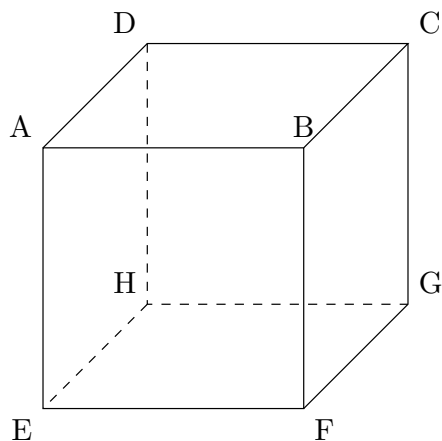
$S$  の中心が存在しうる範囲を  $D$  とするとき、立体  $D$  の体積を求めよ．

(配点率 20 %)

(下書き用紙)

5  $n$  を 0 以上の整数とする．立方体 ABCD-EFGH の頂点を，以下のように移動する 2 つの動点 P, Q を考える．時刻 0 には P は頂点 A に位置し，Q は頂点 C に位置している．時刻  $n$  において，P と Q が異なる頂点に位置していれば，時刻  $n+1$  には，P は時刻  $n$  に位置していた頂点から，それに隣接する 3 頂点のいずれかに等しい確率で移り，Q も時刻  $n$  に位置していた頂点から，それに隣接する 3 頂点のいずれかに等しい確率で移る．一方，時刻  $n$  において，P と Q が同じ頂点に位置していれば，時刻  $n+1$  には P も Q も時刻  $n$  の位置からは移動しない．

- (1) 時刻 1 において，P と Q が異なる頂点に位置するとき，P と Q はどの頂点にあるか．可能な組み合わせをすべて挙げよ．
- (2) 時刻  $n$  において，P と Q が異なる頂点に位置する確率  $r_n$  を求めよ．
- (3) 時刻  $n$  において，P と Q がともに上面 ABCD の異なる頂点に位置するか，またはともに下面 EFGH の異なる頂点に位置するかのいずれかである確率を  $p_n$  とする．また，時刻  $n$  において，P と Q のいずれか一方が上面 ABCD，他方が下面 EFGH にある確率を  $q_n$  とする． $p_{n+1}$  を， $p_n$  と  $q_n$  を用いて表せ．
- (4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n}{p_n}$  を求めよ．



(配点率 20 %)











