

2009 年 度

前 期 日 程

数 学 問 題

(理系)

〔注 意〕

1. 問題冊子および解答用冊子は、試験開始の合図があるまで開いてはいけない。
2. 受験番号は、解答用紙の受験番号欄（計 10 か所）に正確に記入すること。
3. 問題本文が脱落している場合は直ちに申し出ること。
4. 解答用冊子には表紙 1 枚と解答用紙 5 枚と白紙 2 枚が一緒に折り込まれている。解答用紙をミシン目に従って切り離すこと。
5. 解答（途中の計算，推論等を含む）は，指定された解答用紙の指定された場所に記入すること。指定された解答用紙の指定された場所以外に記入した解答は無効とする。
6. 問題冊子の余白は下書きに使用してもよい。
7. 解答用紙は持ち帰ってはいけない。
8. 問題冊子，および解答用冊子の表紙・白紙は持ち帰ること。

(下書き用紙)

(下書き用紙)

- 1 放物線 $C : y = x^2$ 上の点 $A_1(a_1, a_1^2), A_2(a_2, a_2^2), A_3(a_3, a_3^2), \dots$ を, A_{k+2} ($k \geq 1$) における C の接線が直線 $A_k A_{k+1}$ に平行であるようにとる. ただし, $a_1 < a_2$ とする. 三角形 $A_k A_{k+1} A_{k+2}$ の面積を T_k とし, 直線 $A_1 A_2$ と C で囲まれた部分の面積を S とする. このとき次の問いに答えよ.

(1) $\frac{T_{k+1}}{T_k}$ を求めよ.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n T_k$ を S を用いて表せ.

(配点率 20 %)

- 2 行列 $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換を f とする. 点 $P(16\sqrt{3}, 16)$ をとり, $P_1 = f(P)$, $P_{n+1} = f(P_n)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とする. 正の整数 k に対して, 次の条件をみたす領域を D_k とする.

$$x < 0, \quad y < 0, \quad \sqrt{3}x + y \leq -2^{-k}$$

このとき D_k に含まれる P_n の個数を k で表せ.

(配点率 20 %)

(下書き用紙)

- 3 α を 2 次方程式 $x^2 - 2x - 1 = 0$ の解とすると、 $(a + 5\alpha)(b + 5c\alpha) = 1$ をみたす整数の組 (a, b, c) をすべて求めよ。ただし、必要ならば $\sqrt{2}$ が無理数であることは証明せずに用いてよい。

(配点率 20 %)

(下書き用紙)

4

平面上の三角形 OAB を考え, 辺 AB の中点を M とする.

$$\vec{a} = \frac{\vec{OA}}{|\vec{OA}|}, \quad \vec{b} = \frac{\vec{OB}}{|\vec{OB}|}$$

とおき, 点 P を $\vec{a} \cdot \vec{OP} = -\vec{b} \cdot \vec{OP} > 0$ であるようにとる. 直線 OP に A から下ろした垂線と直線 OP の交点を Q とする.

- (1) $\vec{MQ}$ と $\vec{b}$ は平行であることを示せ.
- (2) $|\vec{MQ}| = \frac{1}{2}(|\vec{OA}| + |\vec{OB}|)$ であることを示せ.

(配点率 20 %)

(下書き用紙)

5 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して, $y = \log(nx)$ と $\left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + y^2 = 1$ の交点のうち第 1 象限にある点を (p_n, q_n) とする.

(1) 不等式 $1 - q_n^2 \leq \frac{(e-1)^2}{n^2}$ を示すことにより, $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1$ を証明せよ. ただし, e は自然対数の底である.

(2) $S_n = \int_{\frac{1}{n}}^{p_n} \log(nx) dx$ を p_n で表せ.

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} nS_n$ を求めよ.

(配点率 20 %)

