

入学試験過去問題

数 学

大阪大学（理系）

対象年度：2008 年

試験時間：150 分

問題数：5 問

第 1 問

2 次の正方行列 $A_0, A_1, A_2, A_3, \dots$ を

$$A_0 = O, \quad A_n = B + A_{n-1}C \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める. ただし, O は 2 次の零行列, B と C は 2 次の正方行列とする.

(1) $A_n(E - C)$ を B と C を用いて表せ. ここで E は 2 次の単位行列とする.

(2) B と C を

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると, A_{3n} を求めよ.

第 2 問

点 O で交わる 2 つの半直線 OX , OY があって $\angle XOY = 60^\circ$ とする. 2 点 A , B が OX 上に O , A , B の順に, また, 2 点 C , D が OY 上に O , C , D の順に並んでいるとして, 線分 AC の中点を M , 線分 BD の中点を N とする. 線分 AB の長さを s , 線分 CD の長さを t とするとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 線分 MN の長さを s と t を用いて表せ.
- (2) 点 A , B と C , D が, $s^2 + t^2 = 1$ を満たしながら動くとき, 線分 MN の長さの最大値を求めよ.

第 3 問

N を 2 以上の自然数とする.

- (1) 関数 $f(x) = (N - x) \log x$ を $1 \leq x \leq N$ の範囲で考える. このとき, 曲線 $y = f(x)$ は上に凸であり, 関数 $f(x)$ は極大値を 1 つだけとる. このことを示せ.
- (2) 自然数の列 $a_1, a_2, \dots, a_N$ を

$$a_n = n^{N-n} \quad (n = 1, 2, \dots, N)$$

で定める. $a_1, a_2, \dots, a_N$ のうちで最大の値を M とし, $M = a_n$ となる n の個数を k とする. このとき $k \leq 2$ であることを示せ.

- (3) (2) で $k = 2$ となるのは, N が 2 のときだけであることを示せ.

第 4 問

t を負の実数とし, xy 平面上で曲線 $y = 2^{2x+2t}$ と曲線 $y = 2^{x+3t}$ および y 軸で囲まれる部分を D とする.

- (1) D を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積 $V(t)$ を求めよ.
- (2) t が負の実数の範囲を動くとき, $V(t)$ の最大値を求めよ.

第 5 問

1 枚の硬貨を繰り返し投げる反復試行を行い，表が 500 回続けて出たときに終わるものとする． n を 500 以上の自然数とすると，この反復試行が n 回目で終わる確率を $p(n)$ とする．

- (1) $501 \leq n \leq 1000$ のとき， $p(n)$ は n に関係なく一定の値になることを示し，またその値を求めよ．
- (2) $p(1002) - p(1001)$ の値を求めよ．
- (3) $1002 \leq n \leq 1500$ のとき， $p(n+1) - p(n)$ の値を求めよ．