

2008 年 度

前 期 日 程

数 学 問 題

(理系)

〔注 意〕

1. 問題冊子および解答用冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはいけない。
2. 受験番号は，解答用紙の受験番号欄（計 10 か所）に正確に記入すること。
3. 問題本文が脱落している場合は直ちに申し出ること。
4. 解答用冊子には表紙 1 枚と解答用紙 5 枚と白紙 2 枚が一緒に折り込まれている。解答用紙をミシン目に従って切り離すこと。
5. 解答（途中の計算，推論等を含む）は，指定された解答用紙の指定された場所に記入すること。指定された解答用紙の指定された場所以外に記入した解答は無効とする。
6. 問題冊子の余白は下書きに使用してもよい。
7. 解答用紙は持ち帰ってはいけない。
8. 問題冊子，および解答用冊子の表紙・白紙は持ち帰ること。

(下書き用紙)

(下書き用紙)

1 2 次 の 正 方 行 列 $A_0, A_1, A_2, A_3, \dots$ を

$$A_0 = O, \quad A_n = B + A_{n-1}C \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で 定 め る . た だ し , O は 2 次 の 零 行 列 , B と C は 2 次 の 正 方 行 列 と す る .

(1) $A_n(E - C)$ を B と C を 用 い て 表 せ . こ こ で E は 2 次 の 単 位 行 列 と す る .

(2) B と C を

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

と す る と き , A_{3n} を 求 め よ .

(配点率 20 %)

2 点 O で 交 わ る 2 つ の 半 直 線 OX, OY が あ っ て $\angle XOY = 60^\circ$ と す る . 2 点 A, B が OX 上 に O, A, B の 順 に , ま た , 2 点 C, D が OY 上 に O, C, D の 順 に 並 ん で い る と し て , 線 分 AC の 中 点 を M , 線 分 BD の 中 点 を N と す る . 線 分 AB の 長 さ を s , 線 分 CD の 長 さ を t と す る と き , 以 下 の 問 い に 答 え よ .

(1) 線 分 MN の 長 さ を s と t を 用 い て 表 せ .

(2) 点 A, B と C, D が , $s^2 + t^2 = 1$ を 満 た し な が ら 動 く と き , 線 分 MN の 長 さ の 最 大 値 を 求 め よ .

(配点率 20 %)

(下書き用紙)

3 N を 2 以上の自然数とする.

(1) 関数 $f(x) = (N - x) \log x$ を $1 \leq x \leq N$ の範囲で考える. このとき, 曲線 $y = f(x)$ は上に凸であり, 関数 $f(x)$ は極大値を 1 つだけとる. このことを示せ.

(2) 自然数の列 $a_1, a_2, \dots, a_N$ を

$$a_n = n^{N-n} \quad (n = 1, 2, \dots, N)$$

で定める. $a_1, a_2, \dots, a_N$ のうちで最大の値を M とし, $M = a_n$ となる n の個数を k とする. このとき $k \leq 2$ であることを示せ.

(3) (2) で $k = 2$ となるのは, N が 2 のときだけであることを示せ.

(配点率 20 %)

(下書き用紙)

4 t を負の実数とし, xy 平面上で曲線 $y = 2^{2x+2t}$ と曲線 $y = 2^{x+3t}$ および y 軸で囲まれる部分を D とする.

(1) D を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積 $V(t)$ を求めよ.

(2) t が負の実数の範囲を動くとき, $V(t)$ の最大値を求めよ.

(配点率 20 %)

(下書き用紙)

5 1 枚の硬貨を繰り返し投げる反復試行を行い，表が 500 回続けて出たときに終わるものとする． n を 500 以上の自然数とすると，この反復試行が n 回目で終わる確率を $p(n)$ とする．

(1) $501 \leq n \leq 1000$ のとき， $p(n)$ は n に関係なく一定の値になることを示し，またその値を求めよ．

(2) $p(1002) - p(1001)$ の値を求めよ．

(3) $1002 \leq n \leq 1500$ のとき， $p(n+1) - p(n)$ の値を求めよ．

(配点率 20 %)

