

入学試験過去問題

数 学

大阪大学（理系）

対象年度：2007 年

試験時間：150 分

問題数：5 問

第 1 問

n を自然数とする．関数 $y = \sqrt{x}$ のグラフを C とし， C 上の 2 点 $(n, \sqrt{n})$ と $(n+1, \sqrt{n+1})$ を通る直線を l とする． C と l で囲まれた部分を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を V とする．このとき $\lim_{n \rightarrow \infty} n^a V = b$ を満たす正の数 a, b を求めよ．

第 2 問

次の問いに答えよ.

(1) x が正の数 のとき $|\log x| \leq \frac{|x-1|}{\sqrt{x}}$ を示せ.

(2) p, q, r が $p+q+r=1$ を満たす正の数 のとき

$$p^2 + q^2 + r^2 \geq \frac{1}{3}$$

を示せ.

(3) a, b, c が相異なる正の数 で, $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 1$ を満たすとき

$$\frac{ab}{b-a} \log \frac{b}{a} + \frac{bc}{c-b} \log \frac{c}{b} + \frac{ca}{a-c} \log \frac{a}{c} \leq \frac{1}{3}$$

を示せ.

第 3 問

xy 平面において、原点 O を通る半径 r ($r > 0$) の円を C とし、その中心を A とする。 O を除く C 上の点 P に対し、次の 2 つの条件 (a), (b) で定まる点 Q を考える。

(a) $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ の向きが同じ。

(b) $|\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{OQ}| = 1$ 。

以下の問いに答えよ。

- (1) 点 P が O を除く C 上を動くとき、点 Q は $\overrightarrow{OA}$ に直交する直線上を動くことを示せ。
- (2) (1) の直線を l とする。 l が C と 2 点で交わるとき、 r のとりうる値の範囲を求めよ。

第 4 問

$f(x) = x^3 - x$ とし, t を実数とする. xy 平面において, 曲線 $y = f(x)$ を C_1 とし, 直線 $x = t$ に関して C_1 と対称な曲線

$$y = f(2t - x)$$

を C_2 とする.

- (1) C_1 と C_2 が 3 点で交わる時, t のとりうる値の範囲を求めよ.
- (2) t が (1) で求めた範囲を動くとき, C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積 S の最大値を求めよ.

第 5 問

n を 2 以上の自然数とする. 4 個の行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を重複を許して n 個並べたものを

$$M_1, M_2, \dots, M_n$$

とする.

- (1) 積 $M_1 M_2 \cdots M_n$ が定義できる場合は何通りあるか. その数を n の式で表せ.
- (2) 積 $M_1 M_2 \cdots M_n$ が定義できて, その積が零行列でない 2×3 行列となる場合は何通りあるか. その数を n の式で表せ.
- (3) 積 $M_1 M_2 \cdots M_n$ が定義できて, その積が零行列とならない場合は何通りあるか. その数を n の式で表せ.