

2007 年 度

前 期 日 程

数 学 問 題

(理系)

〔注 意〕

1. 問題冊子および解答用冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはいけない。
2. 受験番号は，解答用紙の受験番号欄（計 10 か所）に正確に記入すること。
3. 問題本文が脱落している場合は直ちに申し出ること。
4. 解答用冊子には表紙 1 枚と解答用紙 5 枚と白紙 2 枚が一緒に折り込まれている。解答用紙をミシン目に従って切り離すこと。
5. 解答（途中の計算，推論等を含む）は，指定された解答用紙の指定された場所に記入すること。指定された解答用紙の指定された場所以外に記入した解答は無効とする。
6. 問題冊子の余白は下書きに使用してもよい。
7. 解答用紙は持ち帰ってはいけない。
8. 問題冊子，および解答用冊子の表紙・白紙は持ち帰ること。

(下書き用紙)

(下書き用紙)

- 1 n を自然数とする．関数 $y = \sqrt{x}$ のグラフを C とし， C 上の 2 点 $(n, \sqrt{n})$ と $(n+1, \sqrt{n+1})$ を通る直線を l とする． C と l で囲まれた部分を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を V とする．このとき $\lim_{n \rightarrow \infty} n^a V = b$ を満たす正の数 a, b を求めよ．

(配点率 20 %)

- 2 次の問いに答えよ．

(1) x が正の数 のとき $|\log x| \leq \frac{|x-1|}{\sqrt{x}}$ を示せ．

(2) p, q, r が $p+q+r=1$ を満たす正の数 のとき

$$p^2 + q^2 + r^2 \geq \frac{1}{3}$$

を示せ．

(3) a, b, c が相異なる正の数 で， $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 1$ を満たすとき

$$\frac{ab}{b-a} \log \frac{b}{a} + \frac{bc}{c-b} \log \frac{c}{b} + \frac{ca}{a-c} \log \frac{a}{c} \leq \frac{1}{3}$$

を示せ．

(配点率 20 %)

(下書き用紙)

3 xy 平面において、原点 O を通る半径 r ($r > 0$) の円を C とし、その中心を A とする。 O を除く C 上の点 P に対し、次の 2 つの条件 (a), (b) で定まる点 Q を考える。

(a) $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ の向きが同じ。

(b) $|\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{OQ}| = 1$ 。

以下の問いに答えよ。

- (1) 点 P が O を除く C 上を動くとき、点 Q は $\overrightarrow{OA}$ に直交する直線上を動くことを示せ。
- (2) (1) の直線を l とする。 l が C と 2 点で交わる時、 r のとりうる値の範囲を求めよ。

(配点率 20 %)

(下書き用紙)

- 4 $f(x) = x^3 - x$ とし, t を実数とする. xy 平面において, 曲線 $y = f(x)$ を C_1 とし, 直線 $x = t$ に関して C_1 と対称な曲線

$$y = f(2t - x)$$

を C_2 とする.

- (1) C_1 と C_2 が 3 点で交わる時, t のとりうる値の範囲を求めよ.
- (2) t が (1) で求めた範囲を動くとき, C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積 S の最大値を求めよ.

(配点率 20 %)

(下書き用紙)

5 n を 2 以上の自然数とする. 4 個の行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を重複を許して n 個並べたものを

$$M_1, M_2, \dots, M_n$$

とする.

- (1) 積 $M_1 M_2 \cdots M_n$ が定義できる場合は何通りあるか. その数を n の式で表せ.
- (2) 積 $M_1 M_2 \cdots M_n$ が定義できて, その積が零行列でない 2×3 行列となる場合何通りあるか. その数を n の式で表せ.
- (3) 積 $M_1 M_2 \cdots M_n$ が定義できて, その積が零行列とならない場合は何通りあるか. その数を n の式で表せ.

(配点率 20 %)

