

入学試験過去問題

数 学

大阪大学（理系）

対象年度：2006 年

試験時間：150 分

問題数：5 問

第 1 問

曲線 $y = x \sin^2 x$ と直線 $y = x$ の共有点のうち、 x 座標が正のものを、 x 座標が小さいものから順に $A_1, A_2, A_3, \dots$ とし、第 n 番目の点を A_n とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 点 A_n の x 座標を求めよ。また、点 A_n において、曲線 $y = x \sin^2 x$ と直線 $y = x$ は接していることを示せ。
- (2) 線分 $A_n A_{n+1}$ と曲線 $y = x \sin^2 x$ で囲まれる部分の面積を求めよ。

第 2 問

直線 $y = x$ を l で, 直線 $y = -x$ を l' で表す. 直線 l, l' のどちらの上にもない点 $A(a, b)$ をとる. 点 A を通る直線 m が 2 直線 l, l' とそれぞれ点 P, P' で交わるとする. 点 Q を

$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OQ}$$

を満たすようにとる. ただし, O は xy 平面の原点である. 直線 m を変化させるとき, 点 Q の軌跡は l と l' を漸近線とする双曲線となることを示せ.

第 3 問

x, y を変数とする.

- (1) n を自然数とする. 次の等式が成り立つように定数 a, b を定めよ.

$$\frac{n+1}{y(y+1)\cdots(y+n)(y+n+1)} = \frac{a}{y(y+1)\cdots(y+n)} + \frac{b}{(y+1)(y+2)\cdots(y+n+1)}$$

- (2) すべての自然数 n について, 次の等式が成り立つことを証明せよ.

$$\frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \sum_{r=0}^n (-1)^r \frac{{}_nC_r}{x+r}$$

第 4 問

三角形 OAB の辺 OA, OB 上に, それぞれ点 P, Q をとり

$$\overrightarrow{OP} = a\overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OQ} = b\overrightarrow{OB} \quad (0 < a < 1, 0 < b < 1)$$

とする. 三角形 OAB の重心 G が三角形 OPQ の内部に含まれるための必要十分条件を a, b を用いて表せ. また, その条件を満たす点 (a, b) はどのような範囲にあるかを座標平面上に図示せよ. ただし, 三角形 OPQ の辺上の点は, 三角形 OPQ の内部に含まれないと考える.

第 5 問

一辺の長さが 1 の正方形 ABCD の辺 BC, CD, DA, AB 上に, それぞれ点 P, Q, R, S を

$$\angle APB = \angle QPC, \quad \angle PQC = \angle RQD, \quad \angle QRD = \angle SRA$$

となるようにとる. ただし, 点 P, Q, R, S は, どれも正方形 ABCD の頂点とは一致しないものとする.

以下の問いに答えよ.

- (1) 線分 BP の長さ t のとりうる値の範囲を求めよ.
- (2) 直線 AP と直線 RS の交点を T とする. 四角形 PQRT の面積を線分 BP の長さ t についての関数と考えて $f(t)$ で表す. $f(t)$ の最大値を求めよ.