

2006 年 度

前 期 日 程

# 数 学 問 題

(理系)

## 〔注 意〕

1. 問題冊子および解答用冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはいけない。
2. 受験番号は，解答用紙の受験番号欄（計 10 か所）に正確に記入すること。
3. 問題本文が脱落している場合は直ちに申し出ること。
4. 解答用冊子には表紙 1 枚と解答用紙 5 枚と白紙 2 枚が一緒に折り込まれている。解答用紙をミシン目に従って切り離すこと。
5. 解答（途中の計算，推論等を含む）は，指定された解答用紙の指定された場所に記入すること。指定された解答用紙の指定された場所以外に記入した解答は無効とする。
6. 問題冊子の余白は下書きに使用してもよい。
7. 解答用紙は持ち帰ってはいけない。
8. 問題冊子，および解答用冊子の表紙・白紙は持ち帰ること。

(下書き用紙)

(下書き用紙)

1 曲線  $y = x \sin^2 x$  と直線  $y = x$  の共有点のうち、 $x$  座標が正のものを、 $x$  座標が小さいものから順に  $A_1, A_2, A_3, \dots$  とし、第  $n$  番目の点を  $A_n$  とする。以下の問いに答えよ。

(1) 点  $A_n$  の  $x$  座標を求めよ。また、点  $A_n$  において、曲線  $y = x \sin^2 x$  と直線  $y = x$  は接していることを示せ。

(2) 線分  $A_n A_{n+1}$  と曲線  $y = x \sin^2 x$  で囲まれる部分の面積を求めよ。

(配点率 20 %)

2 直線  $y = x$  を  $l$  で、直線  $y = -x$  を  $l'$  で表す。直線  $l, l'$  のどちらの上にもない点  $A(a, b)$  をとる。点  $A$  を通る直線  $m$  が 2 直線  $l, l'$  とそれぞれ点  $P, P'$  で交わるとする。点  $Q$  を

$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OQ}$$

を満たすようにとる。ただし、 $O$  は  $xy$  平面の原点である。直線  $m$  を変化させるとき、点  $Q$  の軌跡は  $l$  と  $l'$  を漸近線とする双曲線となることを示せ。

(配点率 20 %)

(下書き用紙)

3  $x, y$  を変数とする.

(1)  $n$  を自然数とする. 次の等式が成り立つように定数  $a, b$  を定めよ.

$$\frac{n+1}{y(y+1)\cdots(y+n)(y+n+1)} = \frac{a}{y(y+1)\cdots(y+n)} + \frac{b}{(y+1)(y+2)\cdots(y+n+1)}$$

(2) すべての自然数  $n$  について, 次の等式が成り立つことを証明せよ.

$$\frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \sum_{r=0}^n (-1)^r \frac{{}_nC_r}{x+r}$$

(配点率 20 %)

(下書き用紙)

4 三角形 OAB の辺 OA, OB 上に, それぞれ点 P, Q をとり

$$\overrightarrow{OP} = a\overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OQ} = b\overrightarrow{OB} \quad (0 < a < 1, 0 < b < 1)$$

とする. 三角形 OAB の重心 G が三角形 OPQ の内部に含まれるための必要十分条件を  $a, b$  を用いて表せ. また, その条件を満たす点  $(a, b)$  はどのような範囲にあるかを座標平面上に図示せよ. ただし, 三角形 OPQ の辺上の点は, 三角形 OPQ の内部に含まれないと考える.

(配点率 20 %)

(下書き用紙)

- 5 一辺の長さが 1 の正方形 ABCD の辺 BC, CD, DA, AB 上に, それぞれ点 P, Q, R, S を

$$\angle APB = \angle QPC, \quad \angle PQC = \angle RQD, \quad \angle QRD = \angle SRA$$

となるようにとる. ただし, 点 P, Q, R, S は, どれも正方形 ABCD の頂点とは一致しないものとする.

以下の問いに答えよ.

- (1) 線分 BP の長さ  $t$  のとりうる値の範囲を求めよ.
- (2) 直線 AP と直線 RS の交点を T とする. 四角形 PQRT の面積を線分 BP の長さ  $t$  についての関数と考えて  $f(t)$  で表す.  $f(t)$  の最大値を求めよ.

(配点率 20 %)











