

2005 年 度

前 期 日 程

数 学 問 題

(理系)

〔注 意〕

1. 問題冊子および解答用冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはいけない。
2. 受験番号は，解答用紙の受験番号欄（計 10 か所）に正確に記入すること。
3. 問題本文が脱落している場合は直ちに申し出ること。
4. 解答用冊子には表紙 1 枚と解答用紙 5 枚と白紙 2 枚が一緒に折り込まれている。解答用紙をミシン目に従って切り離すこと。
5. 解答（途中の計算，推論等を含む）は，指定された解答用紙の指定された場所に記入すること。指定された解答用紙の指定された場所以外に記入した解答は無効とする。
6. 問題冊子の余白は下書きに使用してもよい。
7. 解答用紙は持ち帰ってはいけない。
8. 問題冊子，および解答用冊子の表紙・白紙は持ち帰ること。

(下書き用紙)

(下書き用紙)

- 1 $f(x) = 2x^3 + x^2 - 3$ とおく. 直線 $y = mx$ が曲線 $y = f(x)$ と相異なる 3 点で交わるような実数 m の範囲を求めよ.

(配点率 20 %)

- 2 正の整数 n に対して

$$S(n) = \sum_{p=1}^{2n} \frac{(-1)^{p-1}}{p}, \quad T(n) = \sum_{q=1}^n \frac{1}{n+q}$$

とおく. 等式 $S(n) = T(n)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が成り立つことを, 数学的帰納法を用いて示せ.

(配点率 20 %)

(下書き用紙)

3 空間内の 4 点 A, B, C, D が

$$AB = 1, \quad AC = 2, \quad AD = 3$$

$$\angle BAC = \angle CAD = 60^\circ, \quad \angle DAB = 90^\circ$$

をみたしている. この 4 点から等距離にある点を E とする. 線分 AE の長さを求めよ.

(配点率 20 %)

(下書き用紙)

4 θ を $0 \leq \theta < 2\pi$ をみたす実数とする．時刻 t における座標が

$$\begin{cases} x = t \cos \theta \\ y = 1 - t^2 + t \sin \theta \end{cases}$$

で与えられるような動点 $P(x, y)$ を考える． t が実数全体を動くとき，点 P が描く曲線を C とする． C が x 軸の $x \geq 0$ の部分と交わる点を Q とする．以下の問いに答えよ．

- (1) $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき， Q の x 座標を求めよ．
- (2) θ が変化すると曲線 C も変化する． θ が $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲を変化するとき， C が通過する範囲を xy 平面上に図示せよ．
- (3) θ が変化すると点 Q も変化する． Q の x 座標が最大となるような θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) について $\tan \theta$ の値を求めよ．

(配点率 20 %)

(下書き用紙)

5 n を正の整数, a を正の実数とする. 曲線 $y = x^n$ と曲線 $y = a \log x$ が, 点 P で共通の接線をもつとする. ただし, 対数は自然対数である. 点 P の x 座標を t とするとき, 以下の問いに答えよ.

(1) a, t をそれぞれ n を用いて表せ.

(2) 曲線 $y = x^n$ と x 軸および直線 $x = t$ で囲まれる部分の面積を S_1 とする. また, 曲線 $y = a \log x$ と x 軸および直線 $x = t$ で囲まれる部分の面積を S_2 とする. このとき, $\frac{S_2}{S_1}$ を n を用いて表せ.

(3) $x \geq 0$ のとき, 不等式

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leq e^{-x} + x - 1 \leq \frac{x^2}{2}$$

が成り立つことを, 次の (a), (b) に分けて示せ. ただし, e は自然対数の底とする.

(i) $x \geq 0$ のとき, 不等式 $e^{-x} + x - 1 \leq \frac{x^2}{2}$ が成り立つことを示せ.

(ii) $x \geq 0$ のとき, 不等式 $\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leq e^{-x} + x - 1$ が成り立つことを示せ.

(4) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_2}{S_1}$ を求めよ.

(配点率 20 %)

