

入学試験過去問題

数 学

大阪大学（理系）

対象年度：2004年

試験時間：150分

問題数：5問

第 1 問

n を自然数とする.

- (1) n 個の複素数 z_k ($k = 1, 2, \dots, n$) が

$$0 \leq \arg z_k \leq \frac{\pi}{2}$$

をみたすならば, 不等式

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2 \leq |z_1 + z_2 + \dots + z_n|^2$$

が成り立つことを示せ.

- (2) n 個の実数 θ_k ($k = 1, 2, \dots, n$) が

$$0 \leq \theta_k \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{かつ} \quad \cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \dots + \cos \theta_n = 1$$

をみたすならば, 不等式

$$\sqrt{n-1} \leq \sin \theta_1 + \sin \theta_2 + \dots + \sin \theta_n$$

が成り立つことを示せ.

第 2 問

素数 p, q に対して

$$a_n = p^n - 4(-q)^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって整数 a_n を定める. ただし, $p > 2q$ とする.

- (1) a_1 と a_2 が 1 より大きい公約数 m をもつならば, $m = 3$ であることを示せ.
- (2) a_n がすべて 3 の倍数であるような p, q のうちで積 pq が最小となるものを求めよ.

第 3 問

n を 3 以上の自然数とする．点 O を中心とする半径 1 の円において，円周を n 等分する点 $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$ を時計回りにとる．各 $i = 1, 2, \dots, n$ に対して，直線 OP_{i-1} ， OP_i とそれぞれ点 P_{i-1} ， P_i で接するような放物線を C_i とする．ただし， $P_n = P_0$ とする．放物線 $C_1, C_2, \dots, C_n$ によって囲まれる部分の面積を S_n とするとき， $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ．

第 4 問

実数 a, r に対し数列 $\{x_n\}$ を

$$\begin{cases} x_1 = a, \\ x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

で定める.

- (1) すべての n について $x_n = a$ となるような a を求めよ.
- (2) $x_2 \neq a, x_3 = a$ となるような a の個数を求めよ.
- (3) $0 \leq a \leq 1$ となるすべての a について $0 \leq x_n \leq 1$ ($n = 2, 3, 4, \dots$) が成り立つような r の範囲を求めよ.

第 5 問

座標平面上に直線 $l: x \sin \theta + y \cos \theta = 1$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) がある. 不等式 $x \geq 0, y \geq 0, x \sin \theta + y \cos \theta \geq 1$ が表す領域を D , 不等式 $x \geq 0, y \geq 0, x \sin \theta + y \cos \theta \leq 1$ が表す領域を D' とする.

D 内に半径 R の 2 つの円 C_1, C_2 を, C_1 は l と y 軸に接し, C_2 は l と x 軸に接し, さらに C_1 と C_2 が外接するようにとる. また D' 内に半径 r の 2 つの円 C'_1, C'_2 を, C'_1 は l と y 軸に接し, C'_2 は l と x 軸に接し, さらに C'_1 と C'_2 が外接するようにとる.

(1) $\frac{r}{R}$ を θ で表せ.

(2) θ が $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき, $\frac{r}{R}$ のとりうる値の範囲を求めよ.