

2004 年 度

前 期 日 程

# 数 学 問 題

(理系)

## 〔注 意〕

1. 問題冊子および解答用冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはいけない。
2. 受験番号は，解答用紙の受験番号欄（計 10 か所）に正確に記入すること。
3. 問題本文が脱落している場合は直ちに申し出ること。
4. 解答用冊子には表紙 1 枚と解答用紙 5 枚と白紙 2 枚が一緒に折り込まれている。解答用紙をミシン目に従って切り離すこと。
5. 解答（途中の計算，推論等を含む）は，指定された解答用紙の指定された場所に記入すること。指定された解答用紙の指定された場所以外に記入した解答は無効とする。
6. 問題冊子の余白は下書きに使用してもよい。
7. 解答用紙は持ち帰ってはいけない。
8. 問題冊子，および解答用冊子の表紙・白紙は持ち帰ること。

(下書き用紙)

(下書き用紙)

**1**  $n$  を自然数とする.

(1)  $n$  個の複素数  $z_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) が

$$0 \leq \arg z_k \leq \frac{\pi}{2}$$

をみたすならば, 不等式

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2 \leq |z_1 + z_2 + \dots + z_n|^2$$

が成り立つことを示せ.

(2)  $n$  個の実数  $\theta_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) が

$$0 \leq \theta_k \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{かつ} \quad \cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \dots + \cos \theta_n = 1$$

をみたすならば, 不等式

$$\sqrt{n-1} \leq \sin \theta_1 + \sin \theta_2 + \dots + \sin \theta_n$$

が成り立つことを示せ.

(配点率 20 %)

**2** 素数  $p, q$  に対して

$$a_n = p^n - 4(-q)^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって整数  $a_n$  を定める. ただし,  $p > 2q$  とする.

(1)  $a_1$  と  $a_2$  が 1 より大きい公約数  $m$  をもつならば,  $m = 3$  であることを示せ.

(2)  $a_n$  がすべて 3 の倍数であるような  $p, q$  のうちで積  $pq$  が最小となるものを求めよ.

(配点率 20 %)

(下書き用紙)

- 3  $n$  を 3 以上の自然数とする．点  $O$  を中心とする半径 1 の円において，円周を  $n$  等分する点  $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$  を時計回りにとる．各  $i = 1, 2, \dots, n$  に対して，直線  $OP_{i-1}, OP_i$  とそれぞれ点  $P_{i-1}, P_i$  で接するような放物線を  $C_i$  とする．ただし， $P_n = P_0$  とする．放物線  $C_1, C_2, \dots, C_n$  によって囲まれる部分の面積を  $S_n$  とするとき， $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  を求めよ．

(配点率 20 %)

(下書き用紙)

4 実数  $a, r$  に対し数列  $\{x_n\}$  を

$$\begin{cases} x_1 = a, \\ x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

で定める.

- (1) すべての  $n$  について  $x_n = a$  となるような  $a$  を求めよ.
- (2)  $x_2 \neq a, x_3 = a$  となるような  $a$  の個数を求めよ.
- (3)  $0 \leq a \leq 1$  となるすべての  $a$  について  $0 \leq x_n \leq 1$  ( $n = 2, 3, 4, \dots$ ) が成り立つような  $r$  の範囲を求めよ.

(配点率 20 %)

(下書き用紙)

5 座標平面上に直線  $l: x \sin \theta + y \cos \theta = 1$  ( $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ) がある. 不等式  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $x \sin \theta + y \cos \theta \geq 1$  が表す領域を  $D$ , 不等式  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $x \sin \theta + y \cos \theta \leq 1$  が表す領域を  $D'$  とする.

$D$  内に半径  $R$  の 2 つの円  $C_1, C_2$  を,  $C_1$  は  $l$  と  $y$  軸に接し,  $C_2$  は  $l$  と  $x$  軸に接し, さらに  $C_1$  と  $C_2$  が外接するようにとる. また  $D'$  内に半径  $r$  の 2 つの円  $C'_1, C'_2$  を,  $C'_1$  は  $l$  と  $y$  軸に接し,  $C'_2$  は  $l$  と  $x$  軸に接し, さらに  $C'_1$  と  $C'_2$  が外接するようにとる.

(1)  $\frac{r}{R}$  を  $\theta$  で表せ.

(2)  $\theta$  が  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  の範囲を動くとき,  $\frac{r}{R}$  のとりうる値の範囲を求めよ.

(配点率 20 %)











