

2003 年 度

前 期 日 程

数 学 問 題

(理系)

〔注 意〕

1. 問題冊子および解答用冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはいけない。
2. 受験番号は，解答用紙の受験番号欄（計 10 か所）に正確に記入すること。
3. 問題本文が脱落している場合は直ちに申し出ること。
4. 解答用冊子には表紙 1 枚と解答用紙 5 枚と白紙 2 枚が一緒に折り込まれている。解答用紙をミシン目に従って切り離すこと。
5. 解答（途中の計算，推論等を含む）は，指定された解答用紙の指定された場所に記入すること。指定された解答用紙の指定された場所以外に記入した解答は無効とする。
6. 問題冊子の余白は下書きに使用してもよい。
7. 解答用紙は持ち帰ってはいけない。
8. 問題冊子，および解答用冊子の表紙・白紙は持ち帰ること。

(下書き用紙)

(下書き用紙)

1 a を正の実数, $w = a(\cos 5^\circ + i \sin 5^\circ)$ とする. ただし i は虚数単位である. また, 複素数の列 $\{z_n\}$ を $z_1 = w$, $z_{n+1} = z_n w^{2n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$) で定める.

- (1) z_n が実数になるための必要十分条件は n が 6 の倍数であることを示せ.
- (2) 複素数平面で原点を O とし z_n を表す点を P_n とする. $1 \leq n \leq 17$ であるような n について, $\triangle OP_n P_{n+1}$ が直角二等辺三角形となるような n と a を求めよ.

(配点率 20 %)

(下書き用紙)

2

- (1) $0 < t < 1$ のとき, 不等式

$$\frac{\log t}{2} < -\frac{1-t}{1+t}$$

が成り立つことを示せ.

- (2) k を正の定数とする. $a > 0$ とし, 曲線 $C : y = e^{kx}$ 上の 2 点 $P(a, e^{ka})$, $Q(-a, e^{-ka})$ を考える. このとき P における C の接線と Q における C の接線の交点の x 座標は常に正であることを示せ.

(配点率 20 %)

(下書き用紙)

3

- (1) $f(x)$ を x の整式とし, $\{a_k\}$ は $a_k < a_{k+1}$ ($k = 1, 2, \dots$) および $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \infty$ をみたす数列とする. このとき

$$f(a_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

ならば $f(x)$ は整式として 0 であることを示せ.

- (2) $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ を x の整式とし

$$F(x) = f_1(x) + f_2(x) \sin x + f_3(x) \sin 2x$$

はすべての実数 x に対して 0 であるとする. このとき $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ はいずれも整式として 0 であることを示せ.

(配点率 20 %)

4

数列 $\{a_k\}$ が $a_k < a_{k+1}$ ($k = 1, 2, \dots$) および

$$a_{k\ell} = a_k + a_\ell, \quad k = 1, 2, \dots, \ell = 1, 2, \dots$$

をみたすとする.

- (1) k, ℓ を 2 以上の自然数とする. 自然数 n が与えられたとき

$$\ell^{m-1} \leq k^n < \ell^m$$

をみたす自然数 m が存在することを示せ.

- (2) k, ℓ を 2 以上の自然数とするとき

$$-\frac{1}{n} < \frac{a_k}{a_\ell} - \frac{\log k}{\log \ell} < \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

が成り立つことを示せ.

- (3) $a_2 = a$ とするとき, 数列 $\{a_k\}$ の一般項を求めよ.

(配点率 20 %)

(下書き用紙)

5

- (1) 平面上において座標軸に平行な主軸（長軸，短軸）をもち， x 軸， y 軸の両方に接する楕円を考える．その中心の x 座標を a とする．このような楕円のうち点 $A(1, 2)$ を通るものが存在するための a の範囲を求めよ．ただし円は楕円の特別な場合とみなすものとする．
- (2) (1) の楕円がちょうど 2 つ存在するような a に対して，その 2 つの楕円の中心を B, C とする． $\triangle ABC$ の面積を $S(a)$ で表すときこの関数のグラフをかけ．

(配点率 20 %)

