

2002 年 度

前 期 日 程

数 学 問 題

(理系)

〔注 意〕

1. 問題冊子および解答用冊子は、試験開始の合図があるまで開いてはいけない。
2. 受験番号は、解答用紙の受験番号欄（計 10 か所）に正確に記入すること。
3. 問題本文が脱落している場合は直ちに申し出ること。
4. 解答用冊子には表紙 1 枚と解答用紙 5 枚と白紙 2 枚が一緒に折り込まれている。解答用紙をミシン目に従って切り離すこと。
5. 解答（途中の計算，推論等を含む）は，指定された解答用紙の指定された場所に記入すること。指定された解答用紙の指定された場所以外に記入した解答は無効とする。
6. 問題冊子の余白は下書きに使用してもよい。
7. 解答用紙は持ち帰ってはいけない。
8. 問題冊子，および解答用冊子の表紙・白紙は持ち帰ること。

(下書き用紙)

(下書き用紙)

1 実数を係数とする 3 次方程式

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

が異なる 3 つの実数解をもつとする. このとき, $a > 0$, $b > 0$ ならば, 少なくとも 2 つの実数解は負であることを示せ.

(配点率 20 %)

(下書き用紙)

2 平面上に双曲線 $C: y = \frac{1}{x}$ を考える. a, b, c, d を $d < c < 0 < b < a$ をみたす数とし, 曲線 C 上の 4 点 P, Q, R, S をそれぞれ x 座標が a, b, c, d であるような点としたとき, 四角形 $PQSR$ が長方形になっているとする.

- (1) b, c, d を a を用いて表せ.
- (2) 線分 PR と x 軸との交点を T , 線分 QS と y 軸との交点を U とするとき, 線分 TU と曲線 C が共通点をもたないような a の値の範囲を求めよ.
- (3) a が (2) の範囲にあるとき, 3 線分 PT, TU, UQ と曲線 C で囲まれた部分の面積 $S(a)$ を求めよ.
- (4) a が (2) の範囲を動くとき, $S(a)$ の増減を調べその最大値を求めよ.

(配点率 20 %)

(下書き用紙)

3 α を $|\alpha| = 1$ であるような複素数とし、複素数の列 $\{z_n\}$ を

$$z_1 = 1, \quad z_2 = \frac{\alpha^4}{2}, \quad \frac{z_n}{z_{n-1}} = \frac{\alpha^2}{4} \frac{\overline{z_{n-2}}}{z_{n-1}} \quad (n = 3, 4, 5, \dots)$$

で定める．ただし、 $\overline{z_n}$ は複素数 z_n の共役な複素数とする．

(1) 各 n に対し、 z_n を求めよ．

(2) z_n の実部と虚部をそれぞれ x_n, y_n とし、 $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ とおくとき、無限級数の和

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} y_k$$

をそれぞれ求めよ．

(配点率 20 %)

4 n を $n \geq 7$ をみたす整数とし、1つのさいころを投げる試行を n 回くり返す．このとき、 $2 \leq k \leq n$ をみたす整数 k に対し、「 n 回の試行のうち、同じ目が出るどの2つの試行も k 以上離れている」という事象が起こる確率を p_k と表す．ただし、 i 番目の試行と j 番目の試行について、この2つの試行は $|i - j|$ だけ離れているということにする．

(1) p_2 の値を求めよ．

(2) $k \geq 3$ のとき、 p_k の値を求めよ．

(3) 「 n 回の試行において、同じ目が続くことはなく、しかも同じ目が出る試行の組でちょうど2だけ離れたものが少なくとも1組存在する」という事象が起こる確率を求めよ．

(配点率 20 %)

(下書き用紙)

5 平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円 C_1 と点 $P(0, \sin \alpha)$ を中心とする半径 1 の円 C_2 がある. ただし $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ とする. 円 C_2 と x 軸との交点を A, B とし, A, B を通り y 軸と平行な直線をそれぞれ ℓ_A, ℓ_B とする. 2 直線 ℓ_A, ℓ_B ではさまれた領域の部分で, 円 C_1 の外部で円 C_2 の内部であるものを D_1 , 円 C_2 の外部で円 C_1 の内部であるものを D_2 とする. いま, D_1, D_2 をそれぞれ x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を $V_1(\alpha), V_2(\alpha)$ とする.

(1) $V_1(\alpha), V_1(\alpha) - V_2(\alpha)$ をそれぞれ α を用いて表せ.

(2) α が $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき, $V_1(\alpha) - V_2(\alpha)$ の最大値を求めよ.

(配点率 20 %)

