

2001 年 度

前 期 日 程

数 学 問 題

(理系)

〔注 意〕

1. 問題冊子および解答用冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはいけない。
2. 受験番号は，解答用紙の受験番号欄（計 10 か所）に正確に記入すること。
3. 問題本文が脱落している場合は直ちに申し出ること。
4. 解答用冊子には表紙 1 枚と解答用紙 5 枚と白紙 2 枚が一緒に折り込まれている。解答用紙をミシン目に従って切り離すこと。
5. 解答（途中の計算，推論等を含む）は，指定された解答用紙の指定された場所に記入すること。指定された解答用紙の指定された場所以外に記入した解答は無効とする。
6. 問題冊子の余白は下書きに使用してもよい。
7. 解答用紙は持ち帰ってはいけない。
8. 問題冊子，および解答用冊子の表紙・白紙は持ち帰ること。

(下書き用紙)

(下書き用紙)

1 2つの複素数 $z = x + yi$, $w = u + vi$ (x, y, u, v は実数, $i = \sqrt{-1}$ は虚数単位) に対し, $x \geq u$ と $y \geq v$ がともに成り立つとき, $z \gg w$ と書くことにする.

(1) 次の条件

$$z^2 \gg 3 \quad \text{かつ} \quad \bar{z} \gg -\frac{5}{\bar{z}}$$

をみたす複素数 z の範囲を求め, 複素数平面上に図示せよ. ただし, $\bar{z}$ は z に共役な複素数とする.

(2) (1) で求めた範囲を z が動くとき, 絶対値 $|z - 3i|$ の最小値, および最小値をあたえる z を求めよ.

(配点率 20 %)

(下書き用紙)

- 2 $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2$ とおく．曲線 $y = f(x)$ に点 $(0, a)$ から接線がただひとつ引けるとし，しかもその接線はただ 1 点でこの曲線に接するとする．このときの a の値を求めよ．

(配点率 20 %)

(下書き用紙)

3 半径 1 の円周上に, $4n$ 個の点 $P_0, P_1, \dots, P_{4n-1}$ が, 反時計回りに等間隔に並んでいるとする. ただし, n は自然数である.

- (1) 線分 P_0P_k の長さが $\sqrt{2}$ 以上となる k の範囲を求めよ.
- (2) 点 $P_0, P_1, \dots, P_{4n-1}$ のうちの相異なる 3 点を頂点に持つ三角形のうち, 各辺の長さがすべて $\sqrt{2}$ 以上になるものの個数 $g(n)$ を求めよ.

(配点率 20 %)

4 関数 $f(x) = 4\cos^2 x - 8\cos x + 3$ を考える. n, k を自然数とし

$$g_n(k) = f\left(\frac{\pi}{3n}\right) + f\left(\frac{2\pi}{3n}\right) + \dots + f\left(\frac{k\pi}{3n}\right)$$

とおく. ただし $n \geq 2$ とする.

- (1) n を固定する. $2 \leq k \leq 3n$ の範囲で $g_n(k-1) \geq g_n(k)$ となる k をすべて求めよ. また, k が $1 \leq k \leq 3n$ の範囲を動くとき, $g_n(k)$ を最小とする k をすべて求めよ.
- (2) (1) における $g_n(k)$ の最小値を G_n とする. このとき極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_n}{n}$$

を求めよ.

(配点率 20 %)

(下書き用紙)

- 5 数列 $\{a_n\}$ において、各項 a_n が $a_n \geq 0$ をみたし、かつ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2}$ が成り立つとする。さらに各 n に対し

$$b_n = (1 - a_1)(1 - a_2) \cdots (1 - a_n)$$

$$c_n = 1 - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$

とおく。

- (1) すべての n に対し不等式 $b_n \geq c_n$ が成り立つことを、数学的帰納法で示せ。
- (2) ある n について $b_{n+1} = c_{n+1}$ が成り立てば、 $b_n = c_n$ となることを示せ。
- (3) $b_3 = \frac{1}{2}$ となるとき、 $c_3 = \frac{1}{2}$ であることを示せ。また $b_3 = \frac{1}{2}$ となる数列 $\{a_n\}$ は全部で何種類あるかを求めよ。

(配点率 20 %)

