

入学試験過去問題

数 学

大阪大学（文系）

対象年度：2011 年

試験時間：90 分

問題数：3 問

第 1 問

実数の組 (x, y, z) で, どのような整数 l, m, n に対しても, 等式

$$l \cdot 10^{x-y} - nx + l \cdot 10^{y-z} + m \cdot 10^{x-z} = 13l + 36m + ny$$

が成り立つようなものをすべて求めよ.

第 2 問

実数の組 (p, q) に対し, $f(x) = (x - p)^2 + q$ とおく.

- (1) 放物線 $y = f(x)$ が点 $(0, 1)$ を通り, しかも直線 $y = x$ の $x > 0$ の部分と接するような実数の組 (p, q) と接点の座標を求めよ.
- (2) 実数の組 $(p_1, q_1), (p_2, q_2)$ に対して, $f_1(x) = (x - p_1)^2 + q_1$ および $f_2(x) = (x - p_2)^2 + q_2$ とおく. 実数 α, β (ただし $\alpha < \beta$) に対して

$$f_1(\alpha) < f_2(\alpha) \quad \text{かつ} \quad f_1(\beta) < f_2(\beta)$$

であるならば, 区間 $\alpha \leq x \leq \beta$ において不等式 $f_1(x) < f_2(x)$ がつねに成り立つことを示せ.

- (3) 長方形 $R : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$ を考える. また, 4 点 $P_0(0, 1), P_1(0, 0), P_2(1, 1), P_3(1, 0)$ をこの順に線分で結んで得られる折れ線を L とする. 実数の組 (p, q) を, 放物線 $y = f(x)$ と折れ線 L に共有点がないようなすべての組にわたって動かすとき, R の点のうちで放物線 $y = f(x)$ が通過する点全体の集合を T とする. R から T を除いた領域 S を座標平面上に図示し, その面積を求めよ.

第 3 問

a, b, c を実数とする. ベクトル $\vec{v}_1 = (3, 0)$, $\vec{v}_2 = (1, 2\sqrt{2})$ をとり, $\vec{v}_3 = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2$ とおく. 座標平面上のベクトル $\vec{p}$ に対する条件

$$(*) \quad (\vec{v}_1 \cdot \vec{p})\vec{v}_1 + (\vec{v}_2 \cdot \vec{p})\vec{v}_2 + (\vec{v}_3 \cdot \vec{p})\vec{v}_3 = c\vec{p}$$

を考える. ここで $\vec{v}_i \cdot \vec{p}$ ($i = 1, 2, 3$) はベクトル $\vec{v}_i$ とベクトル $\vec{p}$ の内積を表す. このとき以下の問いに答えよ.

- (1) 座標平面上の任意のベクトル $\vec{v} = (x, y)$ が, 実数 s, t を用いて $\vec{v} = s\vec{v}_1 + t\vec{v}_2$ と表されることを, s および t の各々を x, y の式で表すことによって示せ.
- (2) $\vec{p} = \vec{v}_1$ と $\vec{p} = \vec{v}_2$ の両方が条件 (*) をみたすならば, 座標平面上のすべてのベクトル $\vec{v}$ に対して, $\vec{p} = \vec{v}$ が条件 (*) をみたすことを示せ.
- (3) 座標平面上のすべてのベクトル $\vec{v}$ に対して, $\vec{p} = \vec{v}$ が条件 (*) をみたす. このような実数の組 (a, b, c) をすべて求めよ.