

2011 年 度

前 期 日 程

# 数 学 問 題

(文系)

〔注 意〕

1. 問題冊子および解答用冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはいけない。
2. 受験番号は，解答用紙の受験番号欄（計 6 か所）に正確に記入すること。
3. 問題本文が脱落している場合は直ちに申し出ること。
4. 解答用冊子には表紙 1 枚と解答用紙 3 枚と白紙 2 枚が一緒に折り込まれている。解答用紙をミシン目に従って切り離すこと。
5. 解答（途中の計算，推論等を含む）は，指定された解答用紙の指定された場所に記入すること。指定された解答用紙の指定された場所以外に記入した解答は無効とする。
6. 問題冊子の余白は下書きに使用してもよい。
7. 解答用紙は持ち帰ってはいけない。
8. 問題冊子，および解答用冊子の表紙・白紙は持ち帰ること。

(下書き用紙)

(下書き用紙)

1 実数の組  $(x, y, z)$  で, どのような整数  $l, m, n$  に対しても, 等式

$$l \cdot 10^{x-y} - nx + l \cdot 10^{y-z} + m \cdot 10^{x-z} = 13l + 36m + ny$$

が成り立つようなものをすべて求めよ.

(配点率 30 %)

(下書き用紙)

2

実数の組  $(p, q)$  に対し,  $f(x) = (x - p)^2 + q$  とおく.

- (1) 放物線  $y = f(x)$  が点  $(0, 1)$  を通り, しかも直線  $y = x$  の  $x > 0$  の部分と接するような実数の組  $(p, q)$  と接点の座標を求めよ.
- (2) 実数の組  $(p_1, q_1), (p_2, q_2)$  に対して,  $f_1(x) = (x - p_1)^2 + q_1$  および  $f_2(x) = (x - p_2)^2 + q_2$  とおく. 実数  $\alpha, \beta$  (ただし  $\alpha < \beta$ ) に対して

$$f_1(\alpha) < f_2(\alpha) \quad \text{かつ} \quad f_1(\beta) < f_2(\beta)$$

であるならば, 区間  $\alpha \leq x \leq \beta$  において不等式  $f_1(x) < f_2(x)$  がつねに成り立つことを示せ.

- (3) 長方形  $R: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$  を考える. また, 4点  $P_0(0, 1), P_1(0, 0), P_2(1, 1), P_3(1, 0)$  をこの順に線分で結んで得られる折れ線を  $L$  とする. 実数の組  $(p, q)$  を, 放物線  $y = f(x)$  と折れ線  $L$  に共有点がないようなすべての組にわたって動かすとき,  $R$  の点のうちで放物線  $y = f(x)$  が通過する点全体の集合を  $T$  とする.  $R$  から  $T$  を除いた領域  $S$  を座標平面上に図示し, その面積を求めよ.

(配点率 35 %)

(下書き用紙)

3  $a, b, c$  を実数とする. ベクトル  $\vec{v}_1 = (3, 0)$ ,  $\vec{v}_2 = (1, 2\sqrt{2})$  をとり,  $\vec{v}_3 = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2$  とおく. 座標平面上のベクトル  $\vec{p}$  に対する条件

$$(*) \quad (\vec{v}_1 \cdot \vec{p}) \vec{v}_1 + (\vec{v}_2 \cdot \vec{p}) \vec{v}_2 + (\vec{v}_3 \cdot \vec{p}) \vec{v}_3 = c \vec{p}$$

を考える. ここで  $\vec{v}_i \cdot \vec{p}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) はベクトル  $\vec{v}_i$  とベクトル  $\vec{p}$  の内積を表す. このとき以下の問いに答えよ.

- (1) 座標平面上の任意のベクトル  $\vec{v} = (x, y)$  が, 実数  $s, t$  を用いて  $\vec{v} = s\vec{v}_1 + t\vec{v}_2$  と表されることを,  $s$  および  $t$  の各々を  $x, y$  の式で表すことによって示せ.
- (2)  $\vec{p} = \vec{v}_1$  と  $\vec{p} = \vec{v}_2$  の両方が条件  $(*)$  をみたすならば, 座標平面上のすべてのベクトル  $\vec{v}$  に対して,  $\vec{p} = \vec{v}$  が条件  $(*)$  をみたすことを示せ.
- (3) 座標平面上のすべてのベクトル  $\vec{v}$  に対して,  $\vec{p} = \vec{v}$  が条件  $(*)$  をみたす. このような実数の組  $(a, b, c)$  をすべて求めよ.

(配点率 35 %)







