

以下の問いに答えよ．ただし， $\log$ は自然対数， e はその底とする．

- (1) b を実数とする．関数

$$f(x) = \int_x^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \frac{x}{x^2 + 1} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

は単調に減少することを示せ．

- (2) $a \leq b$ を満たす正の実数 a, b に対し，不等式

$$\frac{a}{a^2 + 1} e^{-\frac{a^2}{2}} - \frac{b}{b^2 + 1} e^{-\frac{b^2}{2}} \leq \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt \leq e^{-\frac{a^2}{2}} (b - a)$$

が成り立つことを示せ．

- (3) 数列 $\{I_n\}$ を次のように定める．

$$I_n = \int_1^2 e^{-\frac{nt^2}{2}} dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log I_n$$

を求めよ．ただし，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(n + 1) = 0$$

を用いてもよい．