

大阪大学（文系） 2011 年 第 2 問

実数の組 (p, q) に対し、 $f(x) = (x - p)^2 + q$ とおく．

- (1) 放物線 $y = f(x)$ が点 $(0, 1)$ を通り、しかも直線 $y = x$ の $x > 0$ の部分と接するような実数の組 (p, q) と接点の座標を求めよ．
- (2) 実数の組 $(p_1, q_1), (p_2, q_2)$ に対して、 $f_1(x) = (x - p_1)^2 + q_1$ および $f_2(x) = (x - p_2)^2 + q_2$ とおく．実数 α, β (ただし $\alpha < \beta$) に対して

$$f_1(\alpha) < f_2(\alpha) \quad \text{かつ} \quad f_1(\beta) < f_2(\beta)$$

であるならば、区間 $\alpha \leq x \leq \beta$ において不等式 $f_1(x) < f_2(x)$ がつねに成り立つことを示せ．

- (3) 長方形 $R : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$ を考える．また、4 点 $P_0(0, 1), P_1(0, 0), P_2(1, 1), P_3(1, 0)$ をこの順に線分で結んで得られる折れ線を L とする．実数の組 (p, q) を、放物線 $y = f(x)$ と折れ線 L に共有点がないようなすべての組にわたって動かすとき、 R の点のうちで放物線 $y = f(x)$ が通過する点全体の集合を T とする． R から T を除いた領域 S を座標平面上に図示し、その面積を求めよ．