

大阪大学（理系） 2005 年 第 5 問

n を正の整数, a を正の実数とする. 曲線 $y = x^n$ と曲線 $y = a \log x$ が, 点 P で共通の接線をもつとする. ただし, 対数は自然対数である. 点 P の x 座標を t とするとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) a, t をそれぞれ n を用いて表せ.
- (2) 曲線 $y = x^n$ と x 軸および直線 $x = t$ で囲まれる部分の面積を S_1 とする. また, 曲線 $y = a \log x$ と x 軸および直線 $x = t$ で囲まれる部分の面積を S_2 とする. このとき, $\frac{S_2}{S_1}$ を n を用いて表せ.
- (3) $x \geq 0$ のとき, 不等式

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leq e^{-x} + x - 1 \leq \frac{x^2}{2}$$

が成り立つことを, 次の (a), (b) に分けて示せ. ただし, e は自然対数の底とする.

- (i) $x \geq 0$ のとき, 不等式 $e^{-x} + x - 1 \leq \frac{x^2}{2}$ が成り立つことを示せ.
- (ii) $x \geq 0$ のとき, 不等式 $\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leq e^{-x} + x - 1$ が成り立つことを示せ.

- (4) 極限値 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_2}{S_1}$ を求めよ.