

大阪大学（理系） 2003 年 第 4 問

数列 $\{a_k\}$ が $a_k < a_{k+1}$ ($k = 1, 2, \dots$) および

$$a_{k\ell} = a_k + a_\ell, \quad k = 1, 2, \dots, \ell = 1, 2, \dots$$

をみたすとする.

(1) k, ℓ を 2 以上の自然数とする. 自然数 n が与えられたとき

$$\ell^{m-1} \leq k^n < \ell^m$$

をみたす自然数 m が存在することを示せ.

(2) k, ℓ を 2 以上の自然数とすると

$$-\frac{1}{n} < \frac{a_k}{a_\ell} - \frac{\log k}{\log \ell} < \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

が成り立つことを示せ.

(3) $a_2 = a$ とするとき, 数列 $\{a_k\}$ の一般項を求めよ.