

入学試験過去問題

数 学

岡山大学（理系）

対象年度：2024年

試験時間：120分

問題数：4問

第 1 問

m, n を正の整数とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $x^{3m} - 1$ は $x^3 - 1$ で割り切れることを示せ。
- (2) $x^n - 1$ を $x^2 + x + 1$ で割った余りを求めよ。
- (3) $x^{2024} - 1$ を $x^2 - x + 1$ で割った余りを求めよ。

第 2 問

数直線上を動く点 P がある。点 P は、原点 O を出発して、1 枚のコインを 1 回投げるとき、表が出たら数直線上を正の向きに 1 だけ進み、裏が出たら数直線上を負の向きに 1 だけ進むものとする。コインの表が出る確率と裏が出る確率はともに $\frac{1}{2}$ であるとし、コインを n 回投げ終えた時点での点 P の座標を x_n とする。コインを 10 回投げるとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $x_{10} = 0$ となる確率を求めよ。
- (2) $x_5 \neq 1$ かつ $x_{10} = 0$ となる確率を求めよ。
- (3) $0 \leq x_n \leq 3$ ($n = 1, 2, \dots, 9$) かつ $x_{10} = 0$ となる確率を求めよ。

第 3 問

四面体 $OABC$ において, $OA = OB = OC = 1$ とし, $\angle COA = \alpha$, $\angle COB = \beta$, $\angle AOB = \gamma$ とする。ただし, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ とする。辺 OA の延長上に点 D を $\overrightarrow{OC}$ と $\overrightarrow{CD}$ が垂直になるようにとり, 辺 OB の延長上に点 E を $\overrightarrow{OC}$ と $\overrightarrow{CE}$ が垂直になるようにとり。 $\angle DCE = \theta$ とし, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とするとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) $\overrightarrow{CD}$ を $\vec{a}$, $\vec{c}$, $\cos \alpha$ を用いて表せ。また, $\overrightarrow{CE}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\cos \beta$ を用いて表せ。
- (2) $\cos \theta$ を $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\sin \beta$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ を用いて表せ。
- (3) $\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta$, $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ とする。点 C から平面 DOE に下ろした垂線の足を P とするとき, $CP = \frac{1}{\tan \gamma}$ となることを示せ。

第 4 問

座標平面上で、線分 $S : x + y = 1$ ($0 \leq x \leq 1$) と曲線 $C : \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ で囲まれた図形 D を考える。 S 上に点 $(0, 1)$ からの距離が t となる点 P をとる。このとき、 $0 \leq t \leq \sqrt{2}$ である。また、点 P を通り、直線 $x + y = 1$ と垂直に交わる直線を ℓ とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 直線 ℓ の方程式を t を用いて表せ。
- (2) 直線 ℓ と曲線 C の交点を Q とする。線分 PQ の長さを t を用いて表せ。
- (3) 図形 D を直線 $x + y = 1$ のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。