

2024 年度入学試験問題

数 学

(理 系)

試験時間 120 分

注 意

- 1 問題冊子は 1 冊 (4 ページ), 解答用紙は 4 枚, 下書き用紙は 3 枚です。
- 2 試験中に問題冊子の印刷不鮮明, ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等により解答できない場合は, 手を高く挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 すべての解答用紙の受験番号記入欄 2 箇所に受験番号を正しく記入しなさい。
- 4 解答は指定された解答用紙の解答欄に書きなさい。裏面は採点の対象になりません。また, 答だけではなく途中の手順や考え方も記述しなさい。
- 5 試験終了後, 問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰りなさい。

1

m, n を正の整数とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $x^{3m} - 1$ は $x^3 - 1$ で割り切れることを示せ。
- (2) $x^n - 1$ を $x^2 + x + 1$ で割った余りを求めよ。
- (3) $x^{2024} - 1$ を $x^2 - x + 1$ で割った余りを求めよ。

2

数直線上を動く点 P がある。点 P は、原点 O を出発して、1 枚のコインを 1 回投げると、表が出たら数直線上を正の向きに 1 だけ進み、裏が出たら数直線上を負の向きに 1 だけ進むものとする。コインの表が出る確率と裏が出る確率はともに $\frac{1}{2}$ であるとし、コインを n 回投げ終えた時点での点 P の座標を x_n とする。コインを 10 回投げるとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $x_{10} = 0$ となる確率を求めよ。
- (2) $x_5 \neq 1$ かつ $x_{10} = 0$ となる確率を求めよ。
- (3) $0 \leq x_n \leq 3$ ($n = 1, 2, \dots, 9$) かつ $x_{10} = 0$ となる確率を求めよ。

3

四面体 OABC において、 $OA = OB = OC = 1$ とし、 $\angle COA = \alpha$ 、 $\angle COB = \beta$ 、 $\angle AOB = \gamma$ とする。ただし、 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 、 $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ とする。辺 OA の延長上に点 D を $\overrightarrow{OC}$ と $\overrightarrow{CD}$ が垂直になるようにとり、辺 OB の延長上に点 E を $\overrightarrow{OC}$ と $\overrightarrow{CE}$ が垂直になるようにとる。 $\angle DCE = \theta$ とし、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ 、 $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とするとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $\overrightarrow{CD}$ を $\vec{a}$ 、 $\vec{c}$ 、 $\cos \alpha$ を用いて表せ。また、 $\overrightarrow{CE}$ を $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 、 $\cos \beta$ を用いて表せ。
- (2) $\cos \theta$ を $\sin \alpha$ 、 $\cos \alpha$ 、 $\sin \beta$ 、 $\cos \beta$ 、 $\cos \gamma$ を用いて表せ。
- (3) $\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta$ 、 $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ とする。点 C から平面 DOE に下ろした垂線の足を P とするとき、 $CP = \frac{1}{\tan \gamma}$ となることを示せ。

4

座標平面上で、線分 $S : x + y = 1$ ($0 \leq x \leq 1$) と曲線 $C : \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ で囲まれた図形 D を考える。 S 上に点 $(0, 1)$ からの距離が t となる点 P をとる。このとき、 $0 \leq t \leq \sqrt{2}$ である。また、点 P を通り、直線 $x + y = 1$ と垂直に交わる直線を ℓ とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 直線 ℓ の方程式を t を用いて表せ。
- (2) 直線 ℓ と曲線 C の交点を Q とする。線分 PQ の長さを t を用いて表せ。
- (3) 図形 D を直線 $x + y = 1$ のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

