

2022年度入学試験問題

数 学

(理 系)

試験時間 120 分

注 意

- 1 問題冊子は1冊(4ページ)、解答用紙は4枚、下書き用紙は3枚です。
- 2 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等により解答できない場合は、手を高く挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 すべての解答用紙の受験番号記入欄2箇所に受験番号を正しく記入しなさい。
- 4 解答は指定された解答用紙の解答欄に書きなさい。裏面は採点の対象になりません。また、答だけではなく途中の手順や考え方も記述しなさい。
- 5 試験終了後、問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰りなさい。

1

A, B, C の 3 人で次のルールに従って一連の試合を行い、優勝者を決定する。

- 1 試合目は A と B が戦う。
- 自然数 n に対し、 $n + 1$ 試合目は n 試合目の勝者と n 試合目に戦わなかった人が戦う。
- 2 連勝した人が出た時点で、その人が優勝者となり、以後試合は行わない。
- すべての試合において、引き分けはないものとする。

A, B, C が互いに戦う際の勝率は次の通りとする。ただし、 p は $0 < p < 1$ を満たす実数とする。

- A と B の試合：勝つ確率は A と B のどちらも $\frac{1}{2}$ である。
- A と C の試合：A が勝つ確率は $1 - p$, C が勝つ確率は p である。
- B と C の試合：B が勝つ確率は $1 - p$, C が勝つ確率は p である。

n 試合目で優勝者が決定する確率を a_n とするとき、以下の問いに答えよ。

- (1) a_1, a_2, a_3, a_4 を求めよ。
- (2) 自然数 k に対し、 a_{3k} を求めよ。
- (3) C が優勝する確率を求めよ。
- (4) 1 以上 99 以下の自然数 N に対し $p = \frac{N}{100}$ であるとする。このとき C が優勝する確率が $\frac{1}{3}$ 以上になるような N の最小値を求めよ。

2

a を実数とし、座標平面上の曲線

$$C : y = x^3 + (a + 2)x^2 + 2ax + 2$$

を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) a がどのような値をとっても曲線 C は 2 つの定点を通る。その 2 点の座標を求めよ。
- (2) (1) で求めた 2 点のうち、 x 座標の小さい方を点 A、もう一方を点 B とし、その

2点を通る直線を L とする。曲線 C と直線 L が異なる3点で交わり、その交点がすべて線分 AB 上にあるような a の値の範囲を求めよ。

- (3) a の値が (2) で求めた範囲にあるとする。このとき、曲線 C と (2) で定めた直線 L で囲まれた部分の面積 $S(a)$ の最小値を求めよ。

3

ℓ を正の実数とし、四面体 $OABC$ において、各辺の長さを

$$OA = \frac{1}{2}\ell, \quad OB = OC = \ell, \quad AB = CA = \ell, \quad BC = \sqrt{2}\ell$$

とする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とし、点 H は $\overrightarrow{OH} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{8}\vec{b} + \frac{1}{8}\vec{c}$ を満たすとする。以下の問いに答えよ。

- (1) 点 H は3点 A, B, C が定める平面上に存在することを示せ。
- (2) $|\overrightarrow{OH}|$ の値を求めよ。
- (3) $\angle OHB$ の大きさを求めよ。
- (4) 四面体 $OABC$ の体積 V を求めよ。

4

$-1 < x < 1$ に対して

$$f(x) = \log(1+x) + \log(1-x) - x \log(1-x)$$

とおく。ただし、対数は自然対数とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $-1 < x < 1$ のとき、 $f'(x) \geq 0$ であることを示せ。
- (2) $-1 < x < 1$, $x \neq 0$ のとき、 $\frac{f(x)}{x} > 0$ であることを示せ。
- (3) n が2以上の整数のとき、不等式

$$\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n+1} < \frac{n-1}{n} < \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n$$

が成り立つことを示せ。

