

2021 年度入学試験問題

数 学

(理 系)

試験時間 120 分

注 意

- 1 問題冊子は 1 冊 (4 ページ), 解答用紙は 4 枚, 下書き用紙は 3 枚です。
- 2 試験中に問題冊子の印刷不鮮明, ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等により解答できない場合は, 手を高く挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 すべての解答用紙の受験番号記入欄 2 箇所に受験番号を正しく記入しなさい。
- 4 解答は指定された解答用紙の解答欄に書きなさい。裏面は採点の対象になりません。また, 答だけではなく途中の手順や考え方も記述しなさい。
- 5 試験終了後, 問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰りなさい。

1

$0 \leq x \leq 2\pi$ のとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 方程式 $\sin 3x = -\sin x$ を満たす x の値をすべて求めよ。
- (2) 方程式 $\sin 3x = \sin x$ を満たす x の値をすべて求めよ。
- (3) 不等式 $\sin 3x \geq a \sin x$ が $-1 \leq a \leq 1$ を満たすすべての a に対して成り立つような x の値の範囲を求めよ。

2

z は複素数で、 $z \neq 0$ 、 $z \neq \pm 1$ とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 複素数平面上の 3 点 $A(1)$ 、 $B(z)$ 、 $C(z^2)$ が一直線上にあるための z についての必要十分条件を求めよ。
- (2) 複素数平面上の 3 点 $A(1)$ 、 $B(z)$ 、 $C(z^2)$ が $\angle C$ を直角とする直角三角形の 3 頂点になるような z 全体の表す図形を複素数平面上に図示せよ。
- (3) 複素数平面上の 3 点 $A(1)$ 、 $B(z)$ 、 $C(z^2)$ が直角三角形の 3 頂点になるような z 全体の表す図形を複素数平面上に図示せよ。

3

以下の問いに答えよ。

- (1) n が整数のとき, n を 6 で割ったときの余りと n^3 を 6 で割ったときの余りは等しいことを示せ。
- (2) 整数 a, b, c が条件

$$a^3 + b^3 + c^3 = (c + 1)^3 \quad (*)$$

を満たすとき, $a + b$ を 6 で割った余りは 1 であることを示せ。

- (3) $1 \leq a \leq b \leq c \leq 10$ を満たす整数の組 (a, b, c) で, (2) の条件 (*) を満たすものをすべて求めよ。

4

正の整数 n に対して, 関数 $f(x) = x^{2n}$ を考える。 $t > 0$ に対して, 曲線 $y = f(x)$ 上の 3 点

$$A(-t, f(-t)), \quad O(0, 0), \quad B(t, f(t))$$

を通る円の中心を $(p(t), q(t))$, 半径を $r(t)$ とする。このとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) 極限 $\lim_{t \rightarrow +0} p(t)$, $\lim_{t \rightarrow +0} q(t)$, $\lim_{t \rightarrow +0} r(t)$ がすべて収束するとき $n = 1$ であることを示せ。また, このとき $a = \lim_{t \rightarrow +0} p(t)$, $b = \lim_{t \rightarrow +0} q(t)$, $c = \lim_{t \rightarrow +0} r(t)$ の値を求めよ。
- (2) a, b, c を (1) で求めたものとする。このとき, 中心 (a, b) , 半径 c の円と放物線 $y = x^2$ および直線 $x = b$ で囲まれた図形を, x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

