

2016 年度入学試験問題

数 学

(理 系)

試験時間 120 分

注 意

- 1 問題冊子は 1 冊 (4 ページ), 解答用紙は 4 枚, 下書き用紙は 3 枚です。
- 2 試験中に問題冊子の印刷不鮮明, ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等により解答できない場合は, 手を高く挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 すべての解答用紙の受験番号記入欄 2 箇所に受験番号を正しく記入しなさい。
- 4 解答は指定された解答用紙の解答欄に書きなさい。裏面は採点の対象になりません。また, 答だけではなく途中の手順や考え方も記述しなさい。
- 5 試験終了後, 問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰りなさい。

1

p は素数とする。正の整数 n に対し、 p^d が n の約数となる整数 d ($d \geq 0$) のなかで最大のものを $f(n)$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

- (1) $p = 3$, $n = 3^2!$ のとき $f(n)$ の値を求めよ。
- (2) $p = 5$, $n = 5^2!$ のとき $f(n)$ の値を求めよ。
- (3) m が正の整数で $n = p^m!$ のとき $f(n)$ を求めよ。

2

関数 $f(x) = 8x^3 - 6x - 1$ について、以下の問いに答えよ。

- (1) $f(x) = 0$ を満たす実数 x の個数を求めよ。
- (2) $a = \cos \frac{5\pi}{9}$ とするとき、 $f(a)$ の値を求めよ。
- (3) 不等式

$$-\frac{1}{5} < \cos \frac{5\pi}{9} < -\frac{1}{6}$$

を証明せよ。

3

a は正の数とし、次の関数 $y = f_a(x)$ のグラフの変曲点を P とする。

$$f_a(x) = axe^{-\frac{x}{a}} \quad (x \geq 0)$$

このとき以下の問いに答えよ。

- (1) 点 P の座標を求めよ。
- (2) a が区間 $1 \leq a \leq 2$ 全体を動くとき、点 P が描く曲線 C の概形を図示せよ。
- (3) $x \geq 0$ における曲線 $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ と (2) の曲線 C の 3 曲線で囲まれた部分の面積を求めよ。

4

座標空間内に、原点 $O(0, 0, 0)$ を中心とする半径 1 の球面 S と 2 点 $A(0, 0, 1)$, $B(0, 0, -1)$ がある。 O と異なる点 $P(s, t, 0)$ に対し、直線 AP と球面 S の交点で A と異なる点を Q とする。さらに直線 BQ と xy 平面の交点を $R(u, v, 0)$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

- (1) ふたつの線分 OP と OR の長さの積を求めよ。
- (2) s を u, v を用いて表せ。
- (3) l は xy 平面内の直線で、原点 O を通らないものとする。直線 l 上を点 P が動くとき、対応する点 R は xy 平面内の同一円周上にあることを証明せよ。

