

2015年度入学試験問題

数 学

(理 系)

試験時間 120 分

注 意

- 1 問題冊子は1冊(4ページ)、解答用紙は4枚、下書き用紙は3枚です。
- 2 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等により解答できない場合は、手を高く挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 すべての解答用紙の受験番号記入欄2箇所に受験番号を正しく記入しなさい。
- 4 解答は指定された解答用紙の解答欄に書きなさい。裏面は採点の対象になりません。また、答だけではなく途中の手順や考え方も記述しなさい。
- 5 試験終了後、問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰りなさい。

1

n を 2 以上の自然数とし、1 から n までの自然数 k に対して、番号 k をつけたカードをそれぞれ k 枚用意する。これらすべてを箱に入れ、箱の中から 2 枚のカードを同時に引くとき、次の問いに答えよ。

- (1) 用意したカードは全部で何枚か答えよ。
- (2) 引いたカード 2 枚の番号が両方とも k である確率を n と k の式で表せ。
- (3) 引いたカード 2 枚の番号が一致する確率を n の式で表せ。
- (4) 引いたカード 2 枚の番号が連続している確率（すなわち、2 つの番号の差の絶対値が 1 である確率）を n の式で表せ。

2

座標空間内に 3 点 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ をとり、2 つのベクトル $\overrightarrow{AP}$ と $\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CP}$ の内積が 0 になるような点 $P(x, y, z)$ の集合を S とする。3 点 A , B , C を通る平面を α とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) 集合 S は球面であることを示し、その中心 Q の座標と半径 r の値を求めよ。
- (2) 原点 O から最も遠い距離にある S 上の点の座標を求めよ。
- (3) (1) で求めた点 Q は、平面 α 上にあることを示せ。
- (4) (1) で求めた点 Q を通って平面 α に垂直な直線を ℓ とする。球面 S と直線 ℓ のすべての共有点について、その座標を求めよ。

3

自然数 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、関数 $f_n(x) = x^{n+1}(1-x)$ を考える。

- (1) 曲線 $y = f_n(x)$ 上の点 $(a_n, f_n(a_n))$ における接線が原点を通るとき、 a_n を n の式で表せ。ただし、 $a_n > 0$ とする。
- (2) $0 \leq x \leq 1$ の範囲で、曲線 $y = f_n(x)$ と x 軸とで囲まれた図形の面積を B_n とする。また、(1) で求めた a_n に対して、 $0 \leq x \leq a_n$ の範囲で、曲線 $y = f_n(x)$ 、 x 軸、および直線 $x = a_n$ で囲まれた図形の面積を C_n とする。 B_n および C_n を n の式で表せ。
- (3) (2) で求めた B_n および C_n に対して、極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n}{B_n}$ を求めよ。ただし、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ が自然対数の底 e であることを用いてよい。

4

座標空間内の 8 点

$(0, 0, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 1), (0, 1, 1)$

を頂点とする立方体を考える。 $0 < t < 3$ のとき、3 点 $(t, 0, 0), (0, t, 0), (0, 0, t)$ を通る平面でこの立方体を切った切り口の面積を $f(t)$ とし、 $f(0) = f(3) = 0$ とする。関数 $f(t)$ について、次の問いに答えよ。

- (1) $0 \leq t \leq 3$ のとき、 $f(t)$ を t の式で表せ。
- (2) 関数 $f(t)$ の $0 \leq t \leq 3$ における最大値を求めよ。
- (3) 定積分 $\int_0^3 f(t) dt$ の値を求めよ。

