

2013年度入学試験問題

数 学

(理 系)

試験時間 120 分

注 意

- 1 問題冊子は1冊(4ページ)、解答用紙は4枚、下書き用紙は3枚です。
- 2 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等により解答できない場合は、手を高く挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 すべての解答用紙の受験番号記入欄2箇所に受験番号を正しく記入しなさい。
- 4 解答は指定された解答用紙の解答欄に書きなさい。裏面は採点の対象になりません。また、答だけではなく途中の手順や考え方も記述しなさい。
- 5 試験終了後、問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰りなさい。

1

曲線 $y = \left| x - \frac{1}{x} \right|$ ($x > 0$) と直線 $y = 2$ で囲まれた領域の面積 S を求めよ。

2

行列 $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ で定まる座標平面上の 1 次変換を f とする。ただし、 a, b は実数とする。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) 原点 O とは異なる点 $P(x, y)$ を f で移した点を Q とする。このとき、長さの比の値 $\frac{OQ}{OP}$ は P によらないことを示し、その値を a, b を用いて表せ。

(2) 正の整数 n に対して、 $A^n = \begin{pmatrix} p_n & q_n \\ r_n & s_n \end{pmatrix}$ とするとき、

$$p_n^2 + r_n^2 = (a^2 + b^2)^n, \quad q_n^2 + s_n^2 = (a^2 + b^2)^n$$

が成り立つことを示せ。

(3) $109^2 = l^2 + m^2$ を満たす正の整数 l, m を一組求めよ。

3

xy 平面上の 2 点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ に対して, $d(P_1, P_2)$ を

$$d(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

で定義する。いま点 $A(3, 0)$ と点 $B(-3, 0)$ に対して,

$$d(Q, A) = 2d(Q, B)$$

を満たす点 Q からなる図形を T とする。このとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) 点 (a, b) が T 上にあれば, 点 $(a, -b)$ も T 上にあることを示せ。
- (2) T で囲まれる領域の面積を求めよ。
- (3) 点 C の座標を $(13, 8)$ とする。点 D が T 上を動くとき, $d(D, C)$ の最小値を求めよ。

4

xy 平面において, 点 $(1, 2)$ を通る傾き t の直線を l とする。また, l に垂直で原点を通る直線と l との交点を P とする。このとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) 点 P の座標を t を用いて表せ。
- (2) 点 P の軌跡が 2 次曲線 $2x^2 - ay = 0$ と 3 点のみを共有するような a の値を求めよ。また, そのとき 3 つの共有点の座標を求めよ。ただし $a \neq 0$ とする。

