

入学試験過去問題

数 学

岡山大学（理系）

対象年度：2012年

試験時間：120分

問題数：4問

第 1 問

O を原点とする座標平面における曲線 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上に、点 $P\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ をとる。

- (1) C の接線で直線 OP に平行なものをすべて求めよ。
- (2) 点 Q が C 上を動くとき、 $\triangle OPQ$ の面積の最大値と、最大値を与える Q の座標をすべて求めよ。

第 2 問

表の出る確率が p 、裏の出る確率が q である硬貨を用意する。ここで p, q は正の定数で、 $p + q = 1$ を満たすとする。座標平面における領域 D を

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$$

とし、 D 上を動く点 Q を考える。 Q は点 $(0, 0)$ から出発し、硬貨を投げて表が出れば x 軸方向に $+1$ だけ進み、裏が出れば y 軸方向に $+1$ だけ進む。なお、この規則で D 上を進めないときには、その回はその点にとどまるものとする。このとき以下の問いに答えよ。

- (1) 硬貨を 4 回投げて Q が点 $(2, 2)$ に到達する確率 P_4 を求めよ。
- (2) 硬貨を 5 回投げて 5 回目に初めて Q が点 $(2, 2)$ に到達する確率 P_5 を求めよ。
- (3) $P_5 = \frac{1}{9}$ のとき、 p の値を求めよ。

第 3 問

a を正の定数とし、座標平面上の 2 曲線 $C_1: y = e^{x^2}$, $C_2: y = ax^2$ を考える。このとき以下の問いに答えよ。ただし必要ならば $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ であることを用いてもよい。

- (1) $t > 0$ の範囲で、関数 $f(t) = \frac{e^t}{t}$ の最小値を求めよ。
- (2) 2 曲線 C_1 , C_2 の共有点の個数を求めよ。
- (3) C_1 , C_2 の共有点の個数が 2 のとき、これらの 2 曲線で囲まれた領域を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

第 4 問

$f(x) = 4x(1 - x)$ とする。このとき

$$\begin{cases} f_1(x) = f(x), \\ f_{n+1}(x) = f_n(f(x)) \quad (n = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

によって定まる多項式 $f_n(x)$ について以下の問いに答えよ。

- (1) 方程式 $f_2(x) = 0$ を解け。
- (2) $0 \leq t < 1$ を満たす定数 t に対し、方程式 $f(x) = t$ の解を $\alpha(t)$, $\beta(t)$ とする。 c が $0 \leq c < 1$ かつ $f_n(c) = 0$ を満たすとき、 $\alpha(c)$, $\beta(c)$ は $f_{n+1}(x) = 0$ の解であることを示せ。
- (3) $0 \leq x \leq 1$ の範囲での方程式 $f_n(x) = 0$ の異なる解の個数を S_n とする。このとき S_{n+1} を S_n で表し、一般項 S_n を求めよ。