

2012年度入学試験問題

数 学

(理 系)

試験時間 120 分

注 意

- 1 問題冊子は1冊(4ページ)、解答用紙は4枚、下書き用紙は3枚です。
- 2 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等により解答できない場合は、手を高く挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 すべての解答用紙の受験番号記入欄2箇所に受験番号を正しく記入しなさい。
- 4 解答は指定された解答用紙の解答欄に書きなさい。裏面は採点の対象になりません。また、答だけではなく途中の手順や考え方も記述しなさい。
- 5 試験終了後、問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰りなさい。

1

O を原点とする座標平面における曲線 $C : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上に、点 $P \left(1, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ をとる。

- (1) C の接線で直線 OP に平行なものをすべて求めよ。
- (2) 点 Q が C 上を動くとき、 $\triangle OPQ$ の面積の最大値と、最大値を与える Q の座標をすべて求めよ。

2

表の出る確率が p 、裏の出る確率が q である硬貨を用意する。ここで p, q は正の定数で、 $p + q = 1$ を満たすとする。座標平面における領域 D を

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$$

とし、 D 上を動く点 Q を考える。Q は点 $(0, 0)$ から出発し、硬貨を投げて表が出れば x 軸方向に $+1$ だけ進み、裏が出れば y 軸方向に $+1$ だけ進む。なお、この規則で D 上を進めないときには、その回はその点にとどまるものとする。このとき以下の問いに答えよ。

- (1) 硬貨を 4 回投げて Q が点 $(2, 2)$ に到達する確率 P_4 を求めよ。
- (2) 硬貨を 5 回投げて 5 回目に初めて Q が点 $(2, 2)$ に到達する確率 P_5 を求めよ。
- (3) $P_5 = \frac{1}{9}$ のとき、 p の値を求めよ。

3

a を正の定数とし、座標平面上の2曲線 $C_1: y = e^{x^2}$, $C_2: y = ax^2$ を考える。このとき以下の問いに答えよ。ただし必要ならば $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ であることを用いてもよい。

- (1) $t > 0$ の範囲で、関数 $f(t) = \frac{e^t}{t}$ の最小値を求めよ。
- (2) 2曲線 C_1 , C_2 の共有点の個数を求めよ。
- (3) C_1 , C_2 の共有点の個数が2のとき、これらの2曲線で囲まれた領域を y 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積を求めよ。

4

$f(x) = 4x(1-x)$ とする。このとき

$$\begin{cases} f_1(x) = f(x), \\ f_{n+1}(x) = f_n(f(x)) \quad (n = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

によって定まる多項式 $f_n(x)$ について以下の問いに答えよ。

- (1) 方程式 $f_2(x) = 0$ を解け。
- (2) $0 \leq t < 1$ を満たす定数 t に対し、方程式 $f(x) = t$ の解を $\alpha(t)$, $\beta(t)$ とする。 c が $0 \leq c < 1$ かつ $f_n(c) = 0$ を満たすとき、 $\alpha(c)$, $\beta(c)$ は $f_{n+1}(x) = 0$ の解であることを示せ。
- (3) $0 \leq x \leq 1$ の範囲での方程式 $f_n(x) = 0$ の異なる解の個数を S_n とする。このとき S_{n+1} を S_n で表し、一般項 S_n を求めよ。

