

2011 年度入学試験問題

数 学

(理 系)

試験時間 120 分

注 意

- 1 問題冊子は 1 冊 (4 ページ), 解答用紙は 4 枚, 下書き用紙は 3 枚です。
- 2 試験中に問題冊子の印刷不鮮明, ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等により解答できない場合は, 手を高く挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 すべての解答用紙の受験番号記入欄 2 箇所に受験番号を正しく記入しなさい。
- 4 解答は指定された解答用紙の解答欄に書きなさい。裏面は採点の対象になりません。また, 答だけではなく途中の手順や考え方も記述しなさい。
- 5 試験終了後, 問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰りなさい。

1

t を実数とする。行列 $A = \begin{pmatrix} t & t-1 \\ 1-t & 2-t \end{pmatrix}$ について、次の問いに答えよ。

- (1) A の逆行列 A^{-1} が存在することを示せ。
- (2) $A + A^{-1}$, $A - A^{-1}$, $(A - A^{-1})^2$ を求めよ。
- (3) $A^{2n} - tA^n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が n によらない行列になるという。このときの t の値を求めよ。

2

n を 3 以上の整数とする。 $3n$ 枚のカードに 1 から $3n$ までの数字が 1 つずつ書かれている。この中から 3 枚のカードを取り出す。ひとたび取り出したカードは戻さないものとする。

- (1) 3 枚のカードの数字がすべて 3 の倍数である確率を求めよ。
- (2) 3 枚のカードの数字の和が 3 の倍数である確率を求めよ。
- (3) 3 枚のカードの数字の積が 3 の倍数である確率と 3 枚のカードの数字の和が 3 の倍数でない確率とはどちらが大きいかを調べよ。

3

n を自然数とする。曲線 $y = x^2(1 - x)^n$ ($0 \leq x \leq 1$) と x 軸とで囲まれる図形の面積を S_n とする。

- (1) S_n を求めよ。
- (2) $T_n = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$ とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n$ を求めよ。

4

$f(x) = e^{-x^2}$ とする。曲線 $y = f(x)$ 上の点 $A(a, f(a))$ における接線を ℓ ，原点 O を通り ℓ に垂直な直線を ℓ' とし， ℓ と ℓ' との交点を P とする。

- (1) 線分 OP の長さを求めよ。
- (2) ℓ と y 軸との交点を Q とし， $\angle POQ$ を θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) とする。 $\sin \theta$ を a を用いて表せ。
- (3) (2) で求めた $\sin \theta$ を最大にする a の値と，そのときの $\sin \theta$ の値を求めよ。

