

2010年度入学試験問題

数 学

(理 系)

試験時間 120 分

注 意

- 1 問題冊子は1冊(4ページ)、解答用紙は4枚、下書き用紙は3枚です。
- 2 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等により解答できない場合は、手を高く挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 すべての解答用紙の受験番号記入欄2箇所に受験番号を正しく記入しなさい。
- 4 解答は指定された解答用紙の解答欄に書きなさい。裏面は採点の対象になりません。また、答だけではなく途中の手順や考え方も記述しなさい。
- 5 試験終了後、問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰りなさい。

1

男性 $M_1, \dots, M_4$ の 4 人と女性 $F_1, \dots, F_4$ の 4 人が、横一列に並んだ座席 $S_1, \dots, S_8$ に座る場合を考える。

- (1) 同性どうしが隣り合わない座り方は何通りあるか。
- (2) (1) の座り方の中で、 M_1 の両隣りが F_1 と F_2 になる座り方は何通りあるか。
- (3) (1) の座り方の中で、 M_1 と F_1 が隣り合わない座り方は何通りあるか。

2

次の条件で定められる数列 $\{a_n\}$ を考える。

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_{n+2} = a_n + a_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (1) すべての自然数 n に対して

$$X \begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & a_{n+2} \\ a_{n+2} & a_{n+3} \end{pmatrix}$$

が成り立つように、行列 X を定めよ。

- (2) 自然数 n に対して $a_n a_{n+2} - (a_{n+1})^2$ の値を推測して、その結果を数学的帰納法によって証明せよ。

3

原点を中心とする半径 1 の円を C_1 とし、原点を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円を C_2 とする。 C_1 上に点 $P_1(\cos \theta, \sin \theta)$ があり、また、 C_2 上に点 $P_2\left(\frac{1}{2} \cos 3\theta, \frac{1}{2} \sin 3\theta\right)$ がある。ただし、 $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ であるとする。線分 P_1P_2 の中点を Q とし、点 Q の原点からの距離を $r(\theta)$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 点 Q の x 座標の取りうる範囲を求めよ。
- (2) 点 Q が y 軸上にあるときの θ の値を α とする。このとき、 α および定積分

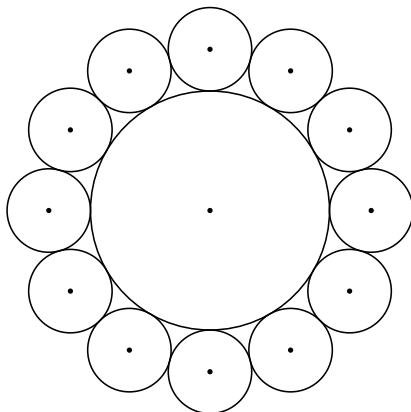
$$\int_0^\alpha \{r(\theta)\}^2 d\theta$$

を求めよ。

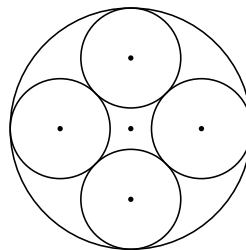
4

平面上に半径 1 の円 C がある。この円に外接し、さらに隣り合う 2 つが互いに外接するように、同じ大きさの n 個の円を図 (例 1) のように配置し、その一つの円の半径を R_n とする。また、円 C に内接し、さらに隣り合う 2 つが互いに外接するように、同じ大きさの n 個の円を図 (例 2) のように配置し、その一つの円の半径を r_n とする。ただし、 $n \geq 3$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) R_6, r_6 を求めよ。
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(R_n - r_n)$ を求めよ。ただし、 $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ を用いてよい。



例 1: $n = 12$ の場合



例 2: $n = 4$ の場合

