

2009年度入学試験問題

数 学

(理 系)

試験時間 120 分

注 意

- 1 問題冊子は1冊(4ページ)、解答用紙は4枚、下書き用紙は3枚です。
- 2 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等により解答できない場合は、手を高く挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 すべての解答用紙の受験番号記入欄2箇所に受験番号を正しく記入しなさい。
- 4 解答は指定された解答用紙の解答欄に書きなさい。裏面は採点の対象になりません。また、答だけではなく途中の手順や考え方も記述しなさい。
- 5 試験終了後、問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰りなさい。

1

1 から 6 までの目があるさいころがある。さいころを振って出た目が k のとき、単位円周上の点 P が原点を中心として正の向きに角 $\frac{\pi}{k}$ だけ回転する。点 P の最初の位置を P_0 として、次の問いに答えよ。

- (1) さいころを何回か振って、点 P の回転した角の合計が $\frac{\pi}{2}$ となるための目の出方を列挙せよ。
- (2) さいころを n 回振って移動した後の位置を P_n とする。 $P_4 = P_0$ となる目の出方は何通りあるか。
- (3) さいころを 2 回振ったところ、1 回目は 4 の目、2 回目は 3 の目が出た。そのとき、三角形 $P_1P_2P_3$ の面積を最大にするような、3 回目のさいころの目は何か。理由を付けて答えよ。

2

2×2 行列 A と B が、条件

$$A \neq O, \quad B \neq O, \quad AB = BA = O$$

を満たしているとする。ただし、 O は零行列を表す。このとき以下の問い (1), (2) に答えよ。もし必要であれば、行列 $X = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ に対して

$$X^2 = (p + s)X - (ps - qr)E \quad \cdots \cdots (*)$$

が成り立つことを使ってもよい。ただし、 E は単位行列を表す。

- (1) ある数 α, β に対して $A^2 = \alpha A, B^2 = \beta B$ となることを示せ。
- (2) (1) において $\alpha = \beta = 1$ のとき、 $A + B = E$ を示せ。

3

x を実数とし、次の無限級数を考える。

$$x^2 + \frac{x^2}{1+x^2-x^4} + \frac{x^2}{(1+x^2-x^4)^2} + \cdots + \frac{x^2}{(1+x^2-x^4)^{n-1}} + \cdots$$

- (1) この無限級数が収束するような x の範囲を求めよ。
- (2) この無限級数が収束するとき、その和として得られる x の関数を $f(x)$ と書く。
また、

$$h(x) = f\left(\sqrt{|x|}\right) - |x|$$

とおく。このとき、 $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ を求めよ。

- (3) (2) で求めた極限値を a とするとき、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - a}{x}$ は存在するか。理由を付けて答えよ。

4

座標平面上に、

$$f(x) = 2(x-1)e^{1-\frac{1}{2}x}$$

で与えられる曲線 $C: y = f(x)$ と、直線 $l: y = ax$ (a は実数) を考える。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) C と l がちょうど 2 個の共有点をもつための a の条件を求めよ。もし必要であれば、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ を使ってもよい。
- (2) C と l が第 1 象限で接するとき、 C と l 、および x 軸で囲まれた領域の面積を求めよ。

