

2008 年度入学試験問題

数 学

(理 系)

試験時間 120 分

注 意

- 1 問題冊子は 1 冊 (4 ページ), 解答用紙は 4 枚, 下書き用紙は 3 枚です。
- 2 試験中に問題冊子の印刷不鮮明, ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等により解答できない場合は, 手を高く挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 すべての解答用紙の受験番号記入欄 2 箇所に受験番号を正しく記入しなさい。
- 4 解答は指定された解答用紙の解答欄に書きなさい。裏面は採点の対象になりません。また, 答だけではなく途中の手順や考え方も記述しなさい。
- 5 試験終了後, 問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰りなさい。

1

n を 3 以上の整数とする。A, B, C の 3 人がそれぞれ 1 から n までの整数を 1 つ選ぶ。どの数を選ぶ確率も等しく $\frac{1}{n}$ とする。A, B, C が選んだ数を順に a, b, c とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) 3 人のうち、少なくとも 1 人が n を選ぶ確率を求めよ。
- (2) a と b が等しくなる確率を求めよ。
- (3) 2 人が同じ数、他の 1 人が異なる数を選ぶ確率を求めよ。
- (4) $a < b < c$ となる確率を求めよ。

2

次の各問いに答えよ。

- (1) p, q を 0 でない定数とする。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = pa_n + \frac{q-p}{2}q^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

- (2)

$$b_n = (-1)^{n-1} \log \frac{n+2}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定められる数列 $\{b_n\}$ に対して、

$$S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

とする。このとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。

3

a を 0 以上の実数, n を正の整数とするとき, 次の問いに答えよ。

(1)

$$\int_0^a e^{a-x} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n dx = \int_0^a e^{a-x} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} dx + e^a - \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$$

が成り立つことを示せ。

(2) $\left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n-1} \leq \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \leq e^a$ が成り立つことを示せ。

(3) $e^a - \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \leq \frac{a^2 e^a}{2n}$ が成り立つことを示せ。

4

xy 平面の曲線

$$C : x = \frac{\cos t}{1 - \sin t}, \quad y = \frac{\sin t}{1 - \cos t} \quad \left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$$

について, 次の問いに答えよ。

(1) 曲線 C 上の $t = \theta$ に対応する点 $P\left(\frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta}, \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}\right)$ における C の接線 ℓ の方程式を求めよ。

(2) $\alpha = \sin \theta + \cos \theta$ とおく。点 $P\left(\frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta}, \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}\right)$ における曲線 C の接線 ℓ と x 軸, y 軸で囲まれた三角形の面積 S を α の式で表せ。

(3) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき, (2) で求めた面積 S の値の範囲を求めよ。

