

# 2007年度入学試験問題

## 数 学

(理 系)

試験時間 120 分

### 注 意

- 1 問題冊子は1冊(4ページ)、解答用紙は4枚、下書き用紙は3枚です。
- 2 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等により解答できない場合は、手を高く挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 すべての解答用紙の受験番号記入欄2箇所に受験番号を正しく記入しなさい。
- 4 解答は指定された解答用紙の解答欄に書きなさい。裏面は採点の対象になりません。また、答だけではなく途中の手順や考え方も記述しなさい。
- 5 試験終了後、問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰りなさい。

1

A, B, C の 3 人のうち 2 人が, 1 から 13 までの数字が書かれた 13 枚のカードの束から順に 1 枚ずつカードを引き, 大きい数のカードを引いた者を勝者とするルールで代わる代わる対戦する。

ただし, 最初に A と B が対戦し, その後は, 直前の対戦の勝者と休んでいた者が対戦を行う。また, カードを引く順番は最初は A から, その後は直前の対戦の勝者からとする。なお, 対戦に先立って毎回カードの束をシャッフルし, 引いたカードは対戦後直ちに元の束に戻すものとする。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) 最初の対戦で A が勝つ確率を求めよ。
- (2) 4 回目の対戦に A が出場する確率を求めよ。
- (3) 5 回の対戦を行うとき, A が 3 人のなかで一番先に連勝を達成する確率を求めよ。

2

$f(x) = x^3 - 3a^2x - b$  とする。ただし,  $a, b$  は実数の定数であり,  $a \geq 0$  とする。次の問いに答えよ。

- (1) 3 次方程式  $f(x) = 0$  のすべての解が区間  $-1 \leq x \leq 1$  に含まれる実数解であるための条件を,  $a$  と  $b$  に関する不等式で表せ。
- (2) 座標平面上で, (1) で求めた条件を満たす点  $(a, b)$  の集合が表す領域を  $D$  とする。 $D$  の概形を描き, その面積を求めよ。

3

方程式  $y = x^2$  で与えられる座標平面上の放物線を  $C$  とする。次の問いに答えよ。

- (1)  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  とする。 $C$  上の点  $P$  をどのように選んでも、 $P$  を行列  $A$  で表される移動によって移した点がまた  $C$  上の点であるとき、 $A$  の成分  $a, b, c, d$  がみたす条件を求めよ。
- (2) 2 点  $Q(-1, 1)$ ,  $Q'(1, -1)$  をとり、 $Q'$  を通り、線分  $QQ'$  と直交する直線を  $l$  とする。 $C$  上の点  $P$  を行列  $B = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$  で表される移動によって移した点を  $P'$  とするとき、 $P'$  から  $Q$  までの距離と  $P'$  から  $l$  までの距離が等しくなるような  $\alpha$  の値を求めよ。

4

関数  $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$  ( $x > 0$ ) について、次の問いに答えよ。

- (1)  $x \geq \frac{3}{4\pi}$  ならば、 $f'(x) > 0$  であることを示せ。
- (2)  $b \geq a > 0$ ,  $b \geq \frac{2}{\pi}$  のとき、

$$\int_a^b f(x) dx \leq (b-a)f(b) \leq b-a$$

が成り立つことを示せ。

