

2006 年度入学試験問題

数 学

(理 系)

試験時間 120 分

注 意

- 1 問題冊子は 1 冊 (4 ページ), 解答用紙は 4 枚, 下書き用紙は 3 枚です。
- 2 試験中に問題冊子の印刷不鮮明, ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等により解答できない場合は, 手を高く挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 すべての解答用紙の受験番号記入欄 2 箇所に受験番号を正しく記入しなさい。
- 4 解答は指定された解答用紙の解答欄に書きなさい。裏面は採点の対象になりません。また, 答だけではなく途中の手順や考え方も記述しなさい。
- 5 試験終了後, 問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰りなさい。

1

座標平面において、曲線 C 上の点 P における接線に垂直で P を通る直線を、 P における C の法線とよぶ。双曲線 $C_1 : y = \frac{1}{x}$ について、次の問いに答えよ。

- (1) 点 $P\left(p, \frac{1}{p}\right)$ における C_1 の法線の方程式を求めよ。ただし、 $p \neq 0$ とする。
- (2) 点 $Q(q, -q)$ を中心とする円 C_2 と C_1 が、ちょうど 2 個の共有点をもつとき、円 C_2 の半径 r を q の式で表せ。

2

次の問いに答えよ。

- (1) 関数 $f(x) = \frac{\log(x+1)}{x}$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。ただし、対数は自然対数とする。
- (2) 実数 a, b は $b > a > 0$ をみたすとする。このとき、次の不等式を証明せよ。

$$(a+1)^b > (b+1)^a$$

3

行列 $A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) は、次の関係式で定まるものとする。

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_n = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 + (-1)^n \end{pmatrix} A_{n-1} \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

このとき、次の問いに答えよ。

- (1) b_3 の値を求めよ。
- (2) b_{2n+1} ($n = 1, 2, 3, \dots$) を n の式で表せ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{2n+1}}{b_{2n}}$ の値を求めよ。

4

座標平面において、原点 $O(0, 0)$ を中心とする半径 1 の円を C_1 とし、点 $P(\cos \theta, \sin \theta)$ と点 $Q(\cos 3\theta, \sin 3\theta)$ における C_1 の接線をそれぞれ l_1, l_2 とする。ただし、 $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ である。 l_1 と l_2 の交点を $R(\alpha, \beta)$ とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) 点 R の座標 α, β を θ の式で表せ。
- (2) θ を $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ の範囲で動かして得られる点 R の軌跡を C_2 とする。このとき、直線 $y = \sqrt{3}x$ と曲線 C_2 と y 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ。

