

2005 年度入学試験問題

数 学

(理 系)

試験時間 120 分

注 意

- 1 問題冊子は 1 冊 (4 ページ), 解答用紙は 4 枚, 下書き用紙は 3 枚です。
- 2 試験中に問題冊子の印刷不鮮明, ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等により解答できない場合は, 手を高く挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 すべての解答用紙の受験番号記入欄 2 箇所に受験番号を正しく記入しなさい。
- 4 解答は指定された解答用紙の解答欄に書きなさい。裏面は採点の対象になりません。また, 答だけではなく途中の手順や考え方も記述しなさい。
- 5 試験終了後, 問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰りなさい。

1

次の問いに答えよ。

- (1) a を正の実数とする。 $x \geq 0$ のとき、 $y = \frac{ax-1}{a-x}$ がとりうる値の範囲を求めよ。
 (2) 実数 x, y, z について

$$(x+y+z)^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2)$$

を示し、等号がいつ成り立つか答えよ。これを用いて、命題

$$\text{「}x^2+y^2+z^2 \leq a \text{ ならば } x+y+z \leq a \text{ である」}$$

が真となる最小の正の実数 a を求めよ。

2

a, b を正の実数とし、2つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を

$$a_1 = a, \quad b_1 = b$$

$$a_{n+1} = \frac{2a_nb_n + a_n^2}{a_n^2 + 5a_nb_n}, \quad b_{n+1} = \frac{3a_nb_n}{a_n^2 + 5a_nb_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める。次の問いに答えよ。

- (1) $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とおく。数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。
 (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ を求めよ。

3

O を原点とする座標平面において、点 A の座標を $(2, 0)$ とする。線分 OA を直径とする円周上の点 T における接線に O から下ろした垂線を OP とする。T が円周上を動くとき、P が描く曲線の長さを求めよ。

4

O を原点とする複素数平面上で、複素数 z を表す点 X は O を中心とする半径 1 の円周上を動くものとする。 z の偏角を θ と表す。 $w = z^2 + \frac{1}{z}$ とおき、 w を表す点を Y とする。次の問いに答えよ。ただし、 θ は $-\pi$ 以上 π 未満とする。

- (1) $w = 0$ となる θ をすべて求めよ。
- (2) $w \neq 0$ のとき、 w の偏角 β を θ で表せ。ただし、 β は $-\pi$ 以上 π 未満とする。
- (3) 三角形 OXY の面積が $\frac{\sqrt{3}}{2}$ となる θ の個数を求めよ。

