

2003年度入学試験問題

数 学

(理 系)

試験時間 120 分

注 意

- 1 問題冊子は1冊(4ページ)、解答用紙は4枚、下書き用紙は3枚です。
- 2 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等により解答できない場合は、手を高く挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 すべての解答用紙の受験番号記入欄2箇所に受験番号を正しく記入しなさい。
- 4 解答は指定された解答用紙の解答欄に書きなさい。裏面は採点の対象になりません。また、答だけではなく途中の手順や考え方も記述しなさい。
- 5 試験終了後、問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰りなさい。

1

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ は, $x = 1, -1, -2$ で整数値 $f(1) = r, f(-1) = s, f(-2) = t$ をとるとする。

- (1) a, b, c を r, s, t の式で表せ。
- (2) すべての整数 n について, $f(n)$ は整数になることを示せ。

2

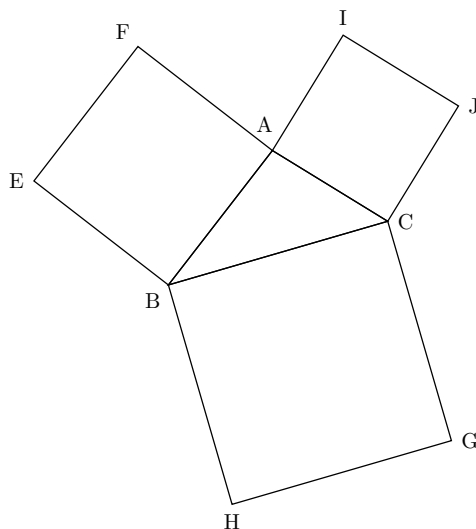
xy 平面の原点を中心とする単位円周 C 上を, A は点 $(1, 0)$ を出発して反時計回りに一定の早さで一周する。 B は点 $(-1, 0)$ を A と同時に出発し, 時計回りに A の n 倍の速さで C 上を回る。ただし n は 2 以上の整数とする。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) A が C を一周する間に A と B は何回出会うか。
- (2) A と B が点 $(0, 1)$ で出会うのは n がどのような条件をみたすときか。
- (3) $n = 7$ とする。 A が, B を通り y 軸に平行な直線の左側 (点 $(-2, 0)$ を含む側) にある範囲を求めて, C 上に図示せよ。

3

複素数平面上において、下の図のように三角形 ABC の各辺の外側に正方形 $ABEF$, $BCGH$, $CAIJ$ を作る。

- (1) 点 A , B , C がそれぞれ複素数 α , β , γ で表されているとき、点 F , H , J を α , β , γ の式で表せ。
- (2) 三つの正方形 $ABEF$, $BCGH$, $CAIJ$ の中心をそれぞれ P , Q , R とする。このとき線分 AQ と線分 PR は長さが等しく、 $AQ \perp PR$ であることを証明せよ。



4

$1 < a < b$ とする。原点 O と点 $A\left(a, \frac{1}{a}\right)$ を通る直線、原点 O と点 $B\left(b, \frac{1}{b}\right)$ を通る直線、および曲線 $y = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) で囲まれた部分を R とする。 R の面積を E , R を直線 $y = -x$ のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を V とする。

- (1) E を a と b の式で表せ。
- (2) $c > 1$ とし、曲線 $y = \frac{1}{x}$ 上の点 $P\left(c, \frac{1}{c}\right)$ から直線 $y = -x$ に下ろした垂線を PQ とする。線分 OQ の長さを s , 線分 PQ の長さを t とすると、 $t^2 = s^2 + 2$ となることを示せ。
- (3) V を a と b の式で表せ。
- (4) $b = a + 1$ のとき $\lim_{a \rightarrow \infty} E$, $\lim_{a \rightarrow \infty} V$ を求めよ。

