

2001 年度入学試験問題

数 学

(理 系)

試験時間 120 分

注 意

- 1 問題冊子は 1 冊 (4 ページ), 解答用紙は 4 枚, 下書き用紙は 3 枚です。
- 2 試験中に問題冊子の印刷不鮮明, ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等により解答できない場合は, 手を高く挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 すべての解答用紙の受験番号記入欄 2 箇所に受験番号を正しく記入しなさい。
- 4 解答は指定された解答用紙の解答欄に書きなさい。裏面は採点の対象になりません。また, 答だけではなく途中の手順や考え方も記述しなさい。
- 5 試験終了後, 問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰りなさい。

1

n を自然数とする。 $f(x)$ は 2 次関数で、曲線 $y = f(x)$ は座標平面上の 3 点 $(-1, 0)$, $(0, 1)$, (n, n) を通るとする。

- (1) 2 次関数 $f(x)$ を求めよ。
- (2) この関数 $f(x)$ について

$$S = f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$$

の値を n を用いて表せ。

- (3) (2) で求めた S の値が整数であるためには、 $n + 2$ が 3 の倍数であることが必要十分である。このことを証明せよ。

2

原点を中心とする半径 1 の円が座標平面上にある。この円に内接する正三角形を原点を中心に回転させるとき、この正三角形の第 1 象限にある部分の面積の最小値と最大値を求めよ。

3

α を 0 でない複素数とし、その偏角 θ は $0^\circ < \theta < 90^\circ$ をみたすものとする。原点を O とする複素数平面において α , $\frac{1}{\alpha}$ の表す点をそれぞれ X , Y とする。

- (1) 実数 1 の表す点を A とする。4 点 O , X , A , Y の順に結んでできる四角形において、 $\angle A$ を $\angle O$ で表せ。
- (2) 実数 t の表す点を T とする。 α によらず点 T がつねに三角形 OXY の外部にあるとき、実数 t はどのような範囲にあるか。

4

$f(t)$ を連続関数、 x を実数として、関数 $g(x)$ を次のように定義する。

$$g(x) = \int_0^1 |f(t) - x| dt$$

- (1) $f(t) = e^t$ のとき、関数 $g(x)$ の増減を調べ、 $y = g(x)$ のグラフの概形を描け。ただし、 $e = 2.71828 \dots$ は自然対数の底である。
- (2) $f(t)$ は微分可能な単調増加関数で、その逆関数も微分可能とし、 $a = f\left(\frac{1}{2}\right)$ とおく。このとき、 $g(x)$ は $x = a$ で最小値をとることを証明せよ。

