

2000年度入学試験問題

数 学

(理 系)

試験時間 120 分

注 意

- 1 問題冊子は1冊(4ページ)、解答用紙は4枚、下書き用紙は3枚です。
- 2 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等により解答できない場合は、手を高く挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 すべての解答用紙の受験番号記入欄2箇所に受験番号を正しく記入しなさい。
- 4 解答は指定された解答用紙の解答欄に書きなさい。裏面は採点の対象になりません。また、答だけではなく途中の手順や考え方も記述しなさい。
- 5 試験終了後、問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰りなさい。

1

x を 1 でない正の実数とし

$$f(x) = (\log_2 2x)^2 - 5 \log_2 x + 3 \log_x 2$$

とおく。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 方程式 $f(x) = 2$ の解を求めよ。
- (2) 不等式 $f(x) \geq 2$ をみたす x の値の範囲を求めよ。

2

整数 x, y が方程式

$$x^2 - 3y^2 = 1 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

をみたすとき、 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を $\textcircled{1}$ の整数解と呼ぶ。

行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) A の逆行列 A^{-1} を求めよ。
- (2) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ が $\textcircled{1}$ の整数解のとき、 $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ も $\textcircled{1}$ の整数解であることを示せ。
- (3) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ は $a > 0, b \geq 0$ なる $\textcircled{1}$ の整数解とし、 $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ とする。このとき $c > 0, d < b$ となることを示せ。また、 $d < 0$ ならば $b = 0$ であることを示せ。
- (4) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ が $a > 0, b > 0$ なる $\textcircled{1}$ の整数解のとき、ある自然数 n に対して $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ が成り立つことを示せ。

3

関数 $f(x) = \cos 3x + \cos 2x + \cos x$ ($0 \leq x \leq \pi$) について次の問いに答えよ。

- (1) $t = \cos x$ とするとき, $f(x)$ を t の式で表せ。
- (2) $f(x) = 0$ をみたす x の値を求めよ。
- (3) (2) で求めた x に対して, $f'(x)$ の値を求めよ。
- (4) 定積分 $\int_0^\pi |f(x)| dx$ の値を求めよ。

4

原点を O とする複素数平面上で, 0 でない複素数 z, w の表す点をそれぞれ $P(z), Q(w)$ とする。 z に対して w を, O を始点とする半直線 $OP(z)$ 上に $Q(w)$ があり, $|w| = \frac{2}{|z|}$ をみたすように取る。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) $w = \frac{2}{z}$ を示せ。
- (2) $\pm 2, \pm 2i$ の表す 4 点を頂点とする正方形の周上を点 $P(z)$ が動く。このとき, $Q(w) = P(z)$ となる z を求めよ。
- (3) $P(z)$ が (2) の正方形の周上を動くとき, 点 $Q(w)$ の描く図形を求めて図示せよ。

