

2023年度入学試験問題

数 学

(文 系)

試験時間 120 分

注 意

- 1 問題冊子は1冊(4ページ)、解答用紙は4枚、下書き用紙は3枚です。
- 2 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等により解答できない場合は、手を高く挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 すべての解答用紙の受験番号記入欄2箇所に受験番号を正しく記入しなさい。
- 4 解答は指定された解答用紙の解答欄に書きなさい。裏面は採点の対象になりません。また、答だけではなく途中の手順や考え方も記述しなさい。
- 5 試験終了後、問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰りなさい。

1

放物線 $C: y = x^2$ 上を動く 2 点 $P(s, s^2)$, $Q(t, t^2)$ を考える。ただし, $s < 0 < t$ とする。P を通り, P における C の接線と垂直に交わる直線を ℓ_P とする。また, Q を通り, Q における C の接線と垂直に交わる直線を ℓ_Q とする。さらに, ℓ_Q は ℓ_P と垂直に交わるとする。以下の問いに答えよ。

- (1) ℓ_P の方程式を s を用いて表せ。
- (2) ℓ_Q の方程式を s を用いて表せ。
- (3) ℓ_P と ℓ_Q の交点を $R(x_0, y_0)$ とする。 x_0, y_0 を s を用いて表せ。
- (4) (3) の y_0 が最小となる s の値を求めよ。

2

数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 1, a_{n+1} = 7a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定める。以下の問いに答えよ。ただし, $\log_{10} 2 = 0.3010, \log_{10} 3 = 0.4771, \log_{10} 7 = 0.8451$ とする。

- (1) a_n が 89 桁の整数となるとき, n を求めよ。
- (2) n を (1) で求めたものとする。 a_n の 1 の位の数字を求めよ。
- (3) n を (1) で求めたものとする。 a_n の最高位の数字を求めよ。

3

座標空間において、3点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 1, 0)$, $B(1, -1, 0)$ がある。 r を正の実数とし、点 $P(a, b, c)$ が条件 $AP = BP = rOP$ を満たしながら動くとする。以下の問いに答えよ。

- (1) $r = 1$ のとき、 OP が最小になるような a, b, c を求めよ。
- (2) $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき、 a のとりうる値の範囲を求めよ。
- (3) $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき、内積 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AP}$ の最大値と最小値を求めよ。

4

箱の中に、1 から 3 までの数字を書いた札がそれぞれ 3 枚ずつあり、全部で 9 枚入っている。A, B の 2 人がこの箱から札を無作為に取り出す。A が 2 枚、B が 3 枚取り出すとき、以下の問いに答えよ。

- (1) A が持つ札の数字が同じである確率を求めよ。
- (2) A が持つ札の数字のいずれかが、B が持つ札の数字のいずれかと同じである確率を求めよ。

