

2016 年度入学試験問題

数 学

(文 系)

試験時間 120 分

注 意

- 1 問題冊子は 1 冊 (4 ページ), 解答用紙は 4 枚, 下書き用紙は 3 枚です。
- 2 試験中に問題冊子の印刷不鮮明, ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等により解答できない場合は, 手を高く挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 すべての解答用紙の受験番号記入欄 2 箇所に受験番号を正しく記入しなさい。
- 4 解答は指定された解答用紙の解答欄に書きなさい。裏面は採点の対象になりません。また, 答だけではなく途中の手順や考え方も記述しなさい。
- 5 試験終了後, 問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰りなさい。

1

複素数 $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ について、以下の問いに答えよ。

- (1) $\omega^2 + \omega^4, \omega^5 + \omega^{10}$ の値を求めよ。
- (2) n を正の整数とすると、 $\omega^n + \omega^{2n}$ の値を求めよ。
- (3) n を正の整数とすると、

$$(\omega + 2)^n + (\omega^2 + 2)^n$$

が整数であることを証明せよ。

2

座標空間内に、原点 $O(0, 0, 0)$ を中心とする半径 1 の球面 S と 2 点 $A(0, 0, 1), B(0, 0, -1)$ がある。 O と異なる点 $P(s, t, 0)$ に対し、直線 AP と球面 S の交点で A と異なる点を Q とする。さらに直線 BQ と xy 平面の交点を $R(u, v, 0)$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

- (1) ふたつの線分 OP と OR の長さの積を求めよ。
- (2) s, t をそれぞれ u, v を用いて表せ。
- (3) 点 P が xy 平面内の直線 $ax + by = 1$ ($a^2 + b^2 \neq 0$) 上を動くとき、対応する点 R は xy 平面内の同一円周上にあることを証明せよ。

3

ひとつのサイコロを3回振り、出た目を順に u, v, w とする。そして座標平面上の2点 $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2)$ を

$$a_1 = u, \quad a_2 = 0, \quad b_1 = v \cos \frac{(w+2)\pi}{12}, \quad b_2 = v \sin \frac{(w+2)\pi}{12}$$

で定める。このとき以下の問いに答えよ。ただし O は原点 $(0, 0)$ とする。

- (1) $\triangle OAB$ が正三角形となる確率を求めよ。
- (2) $\triangle OAB$ が大きさ $\frac{\pi}{3}$ の内角をもつ直角三角形となる確率を求めよ。

4

関数 $f(x) = 8x^3 - 6x - 1$ について、以下の問いに答えよ。

- (1) $f(x) = 0$ を満たす実数 x の個数を求めよ。
- (2) $a = \cos \frac{5\pi}{9}$ とするとき、 $f(a)$ の値を求めよ。
- (3) 不等式

$$-\frac{1}{5} < \cos \frac{5\pi}{9} < -\frac{1}{6}$$

を証明せよ。

