

2014 年度入学試験問題

数 学

(文 系)

試験時間 120 分

注 意

- 1 問題冊子は 1 冊 (4 ページ), 解答用紙は 4 枚, 下書き用紙は 3 枚です。
- 2 試験中に問題冊子の印刷不鮮明, ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等により解答できない場合は, 手を高く挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 すべての解答用紙の受験番号記入欄 2 箇所に受験番号を正しく記入しなさい。
- 4 解答は指定された解答用紙の解答欄に書きなさい。裏面は採点の対象になりません。また, 答だけではなく途中の手順や考え方も記述しなさい。
- 5 試験終了後, 問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰りなさい。

1

数列 $\{a_n\}$ が

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} - a_n = a_n(5 - a_{n+1}) \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たしているとき、以下の問いに答えよ。

- (1) n に関する数学的帰納法で、 $a_n > 0$ であることを証明せよ。
- (2) $b_n = \frac{1}{a_n}$ とおくとき、 b_{n+1} を b_n を用いて表せ。
- (3) a_n を求めよ。

2

四面体 $OABC$ において、 AB の中点を P 、 PC の中点を Q 、 OQ を $m : n$ に内分する点を R とする。ただし、 $m > 0$ 、 $n > 0$ とする。さらに直線 AR が平面 OBC と交わる点を S とする。 $\vec{a} = \vec{OA}$ 、 $\vec{b} = \vec{OB}$ 、 $\vec{c} = \vec{OC}$ とおいて以下の問いに答えよ。

- (1) $\vec{OP}$ 、 $\vec{OQ}$ を $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ を用いて表せ。
- (2) $\vec{OR}$ 、 $\vec{OS}$ を $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 、 m 、 n を用いて表せ。
- (3) $\frac{AR}{RS}$ を m 、 n を用いて表せ。

3

関数 $f(x)$ を

$$f(x) = [x] + 2(x - [x]) - (x - [x])^2$$

と定める。ここで、 $[x]$ は $n \leq x$ を満たす最大の整数 n を表す。

- (1) $f(x) \geq x$ であることを示せ。
- (2) $f(x+1) = f(x) + 1$ であることを示せ。
- (3) $0 \leq x \leq 2$ において $y = f(x)$ のグラフを描け。
- (4) $0 \leq a < 1$ とするとき、 $\int_a^{a+1} f(x) dx$ を求めよ。

4

A と B が続けて試合を行い、先に 3 勝した方が優勝するというゲームを考える。1 試合ごとに A が勝つ確率を p , B が勝つ確率を q , 引き分ける確率を $1-p-q$ とする。

- (1) 3 試合目で優勝が決まる確率を求めよ。
- (2) 5 試合目で優勝が決まる確率を求めよ。
- (3) $p = q = \frac{1}{3}$ としたとき、5 試合目が終了した時点でまだ優勝が決まらない確率を求めよ。
- (4) $p = q = \frac{1}{2}$ としたとき、優勝が決まるまでに行われる試合数の期待値を求めよ。

