

2013年度入学試験問題

数 学

(文 系)

試験時間 120 分

注 意

- 1 問題冊子は1冊(4ページ)、解答用紙は4枚、下書き用紙は3枚です。
- 2 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等により解答できない場合は、手を高く挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 すべての解答用紙の受験番号記入欄2箇所に受験番号を正しく記入しなさい。
- 4 解答は指定された解答用紙の解答欄に書きなさい。裏面は採点の対象になりません。また、答だけではなく途中の手順や考え方も記述しなさい。
- 5 試験終了後、問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰りなさい。

1

以下の問いに答えよ。

- (1) 整数 x, y が $25x - 31y = 1$ を満たすとき, $x - 5$ は 31 の倍数であることを示せ。
- (2) $1 \leq y \leq 100$ とする。このとき, 不等式

$$0 \leq 25x - 31y \leq 1$$

を満たす整数の組 (x, y) をすべて求めよ。

2

等式

$$|x - 3| + |y| = 2(|x + 3| + |y|)$$

を満たす xy 平面上の点 (x, y) からなる図形を T とする。

- (1) 点 (a, b) が T 上にあれば, 点 $(a, -b)$ も T 上にあることを示せ。
- (2) T で囲まれる領域の面積を求めよ。

3

1 個のさいころを n 回投げ、出た目の最大値を X_n とおく。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) X_n が k 以下である確率 p_k を求めよ。ただし、 $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ とする。
- (2) X_n が k である確率 q_k を求めよ。ただし、 $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ とする。
- (3) X_n の期待値を $n = 2$ の場合に求めよ。
- (4) X_n の期待値が 4.5 以上となる n の範囲を求めよ。

4

C を xy 平面上の放物線 $y = x^2$ とする。不等式 $y < x^2$ で表される領域の点 P から C に引いた 2 つの接線に対して、それぞれの接点の x 座標を α, β ($\alpha < \beta$) とする。また、2 つの接線と C で囲まれた部分の面積を S とする。このとき、以下の問いに答えよ。ただし、等式

$$\int_p^q (x - p)^2 dx = \frac{(q - p)^3}{3}$$

を用いてもよい。

- (1) 点 P の座標 (a, b) を α, β を用いて表せ。
- (2) $S = \frac{(\beta - \alpha)^3}{12}$ を示せ。
- (3) 点 P が曲線 $y = x^3 - 1$ ($-1 \leq x \leq 1$) 上を動くとき、 $(\beta - \alpha)^2$ の値の範囲を調べよ。さらに、 S の最大値および最小値を与える点 P の座標を求めよ。

