

2008 年度入学試験問題

数 学

(文 系)

試験時間 120 分

注 意

- 1 問題冊子は 1 冊 (4 ページ), 解答用紙は 4 枚, 下書き用紙は 3 枚です。
- 2 試験中に問題冊子の印刷不鮮明, ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等により解答できない場合は, 手を高く挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 すべての解答用紙の受験番号記入欄 2 箇所に受験番号を正しく記入しなさい。
- 4 解答は指定された解答用紙の解答欄に書きなさい。裏面は採点の対象になりません。また, 答だけではなく途中の手順や考え方も記述しなさい。
- 5 試験終了後, 問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰りなさい。

1

p, q を 0 でない定数とする。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = pa_n + \frac{q-p}{2}q^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定められる数列 $\{a_n\}$ について、次の問いに答えよ。

- (1) a_2, a_3, a_4 を求めよ。
- (2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を推測し、その推測が正しいことを数学的帰納法を用いて証明せよ。

2

勝つ確率が p ($0 \leq p \leq 1$) のゲームに、保有ポイントの一部を賭けて参加する。このゲームには引き分けはなく、勝てば賭けたポイントがもとどり、さらに賭けたポイントの 2 倍を得るが、負ければ賭けたポイントを失う。ポイントは正の実数であるとする。例えば 10 ポイント保有しているときに 1.5 ポイントを賭けると、勝てば保有ポイントは 13 となり、負ければ 8.5 となる。

このゲームに繰り返し参加するものとし、毎回その時点での保有ポイントの x 倍 ($0 < x < 1$) を賭ける。例えば最初の保有ポイントが 10 で $x = 0.1$ とすれば、最初は 1 ポイントを賭ける。勝てば保有ポイントが 12 となり、次回は 1.2 ポイントを賭ける。

このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 1 回の参加で勝った場合、負けた場合、それぞれの保有ポイントが何倍になるかを x を用いて表せ。
- (2) (1) で求めた倍率の期待値を、 x と p を用いて表せ。
- (3) $p = \frac{2}{5}$ とする。このゲームに 2 回参加した時点で、2 勝、1 勝、0 勝の中でどの場合の確率が最も高いか。またその場合に保有ポイントが最大になる x の値を求めよ。

3

$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ のとき, $\cos \theta - \sin \theta$ の値を求めよ。
- (2) $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ のとき, $2 \cos \left(2\theta - \frac{\pi}{3} \right)$ の値を求めよ。
- (3) $2 \cos \left(2\theta - \frac{\pi}{3} \right) \leq -1$ のとき, $\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta$ の最大値と最小値を求めよ。

4

xy 平面上に

$$\text{円 } C_1 : x^2 + y^2 = 1, \quad \text{放物線 } C_2 : y = x^2 + 5$$

がある。また点 $P(x_1, y_1)$ を円 C_1 上の点とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 点 $P(x_1, y_1)$ における円 C_1 の接線 ℓ の方程式を求めよ (答のみでよい)。
- (2) 点 $P(x_1, y_1)$ における円 C_1 の接線 ℓ が放物線 C_2 と共有点を持つときの, y_1 の値の範囲を求めよ。
- (3) 円 C_1 の接線で, その接点の y 座標が負であり, 放物線 C_2 の接線となるものは 2 本ある。これら 2 本の直線それぞれが放物線 C_2 と接する点の座標を求めよ。
- (4) (3) の 2 本の直線と放物線 C_2 で囲まれる図形の面積を求めよ。

