

2007年度入学試験問題

数 学

(文 系)

試験時間 120 分

注 意

- 1 問題冊子は1冊(4ページ)、解答用紙は4枚、下書き用紙は3枚です。
- 2 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等により解答できない場合は、手を高く挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 すべての解答用紙の受験番号記入欄2箇所に受験番号を正しく記入しなさい。
- 4 解答は指定された解答用紙の解答欄に書きなさい。裏面は採点の対象になりません。また、答だけではなく途中の手順や考え方も記述しなさい。
- 5 試験終了後、問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰りなさい。

1

1, 2, 3, 4 の数字が書かれたカードを各 1 枚, 数字 0 が書かれたカードと数字 5 が書かれたカードを各 2 枚ずつ用意する。この中からカードを何枚か選び, 左から順に横一列に並べる。このとき, 先頭のカードの数字が 0 でなければ, カードの数字の列は, 選んだカードの枚数を桁数とする正の整数を表す。このようにして得られる整数について, 次の問いに答えよ。

- (1) 0, 1, 2, 3, 4 の数字が書かれたカード各 1 枚ずつ, 計 5 枚のカードだけを用いて表すことができる 5 桁の整数はいくつあるか。
- (2) 用意されたカードをすべて用いて表すことができる 8 桁の整数はいくつあるか。

2

関数 $y = x^2$ のグラフ C 上に 2 点 $A(\alpha, \alpha^2)$ と $B(\beta, \beta^2)$ をとる。ただし, $\alpha < \beta$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) 線分 AB と C で囲まれる部分の面積が $\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$ であることを示せ。
- (2) 線分 AB の長さが一定値 l であるという条件のもとで (1) の面積が最大になるのは, 線分 AB が x 軸に平行な場合であることを示せ。また, その最大値を l を用いて表せ。

3

k が 4 より大きい自然数であるとき、 $\triangle OA_0A_1$ を、 $\angle O = \left(\frac{360}{k}\right)^\circ$ 、 $\angle A_0 = 90^\circ$ で、面積が 1 であるような直角三角形とする。また、 $n = 2, 3, \dots, k$ に対して、点 A_n を、 $\triangle OA_{n-1}A_n$ が $\triangle OA_{n-2}A_{n-1}$ に相似であるように定める。 $r = \cos \angle O$ とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) $\triangle OA_0A_1, \triangle OA_1A_2, \dots, \triangle OA_{k-1}A_k$ の面積の和 S を r と k を用いて表せ。
- (2) $\angle O = 45^\circ$ のときの S の値と $\angle O = 30^\circ$ のときの S の値を比較し、どちらが大きいか答えよ。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ 、 $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

4

座標平面の原点を O とし、4 点 $(1, 3), (-1, 3), (-1, -3), (1, -3)$ を頂点とする長方形の周を R とする。 $n = 0, 1, 2, \dots$ に対し、 $(1, 0)$ を出発して R 上を反時計回りに秒速 1 で移動する点の n 秒後の位置を P_n とし、 OP_n と OP_{n+2} のなす角度を θ_n とおく。次の問いに答えよ。

- (1) $\cos \theta_0, \cos \theta_1, \cos \theta_2, \cos \theta_3$ を求めよ。
- (2) すべての n に対して $\cos \theta_{n+k} = \cos \theta_n$ が成り立つような自然数 k のうち、もっとも値が小さいものを求めよ。
- (3) θ_n が最小となるときの P_n の座標をすべて求めよ。

