入 学 試 験 過 去 問 題

数　学

名古屋大学（理系）

対象年度： 2026 年

試験時間： 150 分

問題数： 4 問

問　題　紙

1　点Oを原点とする xy 平面において，曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ の第1象限にある部分を C とし，C 上の2点 $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$，$\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{1}{b}\right)$（ただし $0<a<1,\ a<b$）を考える。$\theta=\angle\mathrm{BOA}$ とおき，2直線OA，OBと C で囲まれた部分の面積を S とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　S を $a,\ b$ を用いて表せ。

(2)　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ であるとき，b を a を用いて表せ。

(3)　2点A，Bが C 上を $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ をみたしながら動くとき，S の最小値を与える a の値を求めよ。

2　a を実数とする。空間内の3点 $\mathrm{A}(2,\ 1,\ 3)$，$\mathrm{B}(a+2,\ 3,\ 4)$，$\mathrm{C}(1,\ 0,\ 0)$ を含む平面を H とし，2点 $\mathrm{D}(-1,\ 2,\ 1)$，$\mathrm{E}(-3,\ 1,\ 0)$ を通る直線を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　平面 H が直線DEと共有点をもつための，a の条件を求めよ。

(2)　平面 H が線分DE（両端を含む）と共有点をもつための，a の条件を求めよ。

3　整数の組 $(a,\ b,\ c)$ に対して，次の条件 $(*)$ を考える。

$(*)$　$a,\ b,\ c$ は1以上の整数であり，a と b の最大公約数，a と c の最大公約数，b と c の最大公約数はそれぞれ1である。

以下の問いに答えよ。ただし，組 $(a,\ b,\ c)$ と $(d,\ e,\ f)$ は $a=d,\ b=e,\ c=f$ のとき，かつこのときに限り等しい。

(1)　条件 $(*)$ かつ $abc=120$ をみたす組 $(a,\ b,\ c)$ のうちで，$a\leqq b\leqq c$ をみたすものをすべて求めよ。

(2)　N を2以上の整数とし，N 以下の素数の個数を m とする。条件 $(*)$ かつ $abc=N!$ をみたす組 $(a,\ b,\ c)$ の個数を m を用いて表せ。

(3)　N を2以上の整数とし，N 以下の素数の個数を m とする。条件 $(*)$ かつ $abc=N!$ をみたす組 $(a,\ b,\ c)$ のうちで，$a\leqq b\leqq c$ をみたすものの個数を m を用いて表せ。

4　xy 平面上を次の規則 (i)，(ii) に従って移動する点Aを考える。

(i)　時刻0で点Aは原点にある。

(ii)　ある時刻 k において点Aが $(x,\ y)$ にあるとき，時刻が1増えると点Aは3点 $(x+1,\ y)$，$(x+1,\ y+1)$，$(x,\ y+1)$ のいずれかにそれぞれ $\dfrac{1}{3}$ の確率で移動する。

1以上の整数 n に対して，次の条件 $(*)$ が成り立つ確率を P_n とする。

$(*)$　時刻0から時刻 n まで点Aはつねに $-1\leqq y-x\leqq 1$ で定まる領域にある。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　P_1，P_2，P_3 を求めよ。

(2)　1以上の整数 n に対して，条件 $(*)$ が成り立ちかつ時刻 n で点Aが直線 $y-x=0$ 上にある確率を a_n とする。また，条件 $(*)$ が成り立ちかつ時刻 n で点Aが直線 $y-x=1$ 上または直線 $y-x=-1$ 上にある確率を b_n とする。a_{n+1}，b_{n+1} を a_n，b_n を用いて表せ。

(3)　P_{n+2} を P_{n+1}，P_n を用いて表せ。

(4)　$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{2}}{3}$ とおくとき，

$$P_n\leqq\alpha^{n-1}$$

が1以上のすべての整数 n に対して成り立つことを証明せよ。