入 学 試 験 過 去 問 題

数　学

名古屋大学（理系）

対象年度： 2024 年

試験時間： 150 分

問題数： 4 問

第　1　問

関数 $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ $(x>0)$ に対して，$y=f(x)$ のグラフを C とする。

(1)　$f(x)$ の極値を求めよ。

(2)　x 軸上の点 $\mathrm{P}\,(t,\ 0)$ から C にちょうど 2 本の接線を引くことができるとする。そのような実数 t の値の範囲を求めよ。

(3)　(2) において，C の 2 つの接点の x 座標を $\alpha,\ \beta$ $(\alpha<\beta)$ とする。$\alpha,\ \beta$ がともに整数であるような組 $(\alpha,\ \beta)$ をすべて求めよ。

第 2 問

c を 1 より大きい実数とする。また，i を虚数単位として，$\alpha = \dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$ とおく。複素数 z に対して，

$$P(z) = z^3 - 3z^2 + (c+2)z - c, \quad Q(z) = -\alpha^7 z^3 + 3\alpha^6 z^2 + (c+2)\alpha z - c$$

と定める。

(1) 方程式 $P(z) = 0$ を満たす複素数 z をすべて求め，それらを複素数平面上に図示せよ。

(2) 方程式 $Q(z) = 0$ を満たす複素数のうち実部が最大のものを求めよ。

(3) 複素数 z についての 2 つの方程式 $P(z) = 0$，$Q(z) = 0$ が共通解 β を持つとする。そのときの c の値と β を求めよ。

第　3　問

座標空間の 3 点 A (3, 1, 3), B (4, 2, 2), C (4, 0, 1) の定める平面を H とする。また,

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\,\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{AC}} \quad (s,\ t \text{ は非負の実数})$$

を満たすすべての点 P からなる領域を K とする。

(1)　内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を求めよ。

(2)　原点 O (0, 0, 0) から平面 H に下ろした垂線の足を Q とする。$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表せ。

(3)　領域 K 上の点 P に対して，線分 QP 上の点で $\overrightarrow{\mathrm{AR}} = r\overrightarrow{\mathrm{AC}}$（$r$ は非負の実数）を満たす点 R が存在することを示せ。

(4)　領域 K において原点 O からの距離が最小となる点 S の座標を求めよ。

第 4 問

袋の中にいくつかの赤玉と白玉が入っている。すべての玉に対する赤玉の割合を p $(0 \leqq p \leqq 1)$ とする。袋から無作為に玉を一つ取り出して袋に戻す試行を行う。試行を n 回行うとき，赤玉を k 回以上取り出す確率を $f(k)$ とおく。

(1) $n \geqq 2$ に対して，$f(1)$ と $f(2)$ を求めよ。

(2) $k = 1, 2, \cdots\cdots, n$ に対して，等式

$$f(k) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\int_0^p x^{k-1}(1-x)^{n-k}\,dx$$

を示せ。

(3) 自然数 k に対して，定積分

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} x^k(1-x)^k\,dx$$

を求めよ。