入 学 試 験 過 去 問 題

数　学

名古屋大学（理系）

対象年度： 2024 年

試験時間： 150 分

問題数： 4 問

問　題　紙

1　関数 $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ $(x>0)$ に対して，$y=f(x)$ のグラフを C とする。

(1)　$f(x)$ の極値を求めよ。

(2)　x 軸上の点 $\mathrm{P}\,(t,\ 0)$ から C にちょうど 2 本の接線を引くことができるとする。そのような実数 t の値の範囲を求めよ。

(3)　(2) において，C の 2 つの接点の x 座標を $\alpha,\ \beta$ $(\alpha<\beta)$ とする。$\alpha,\ \beta$ がともに整数であるような組 $(\alpha,\ \beta)$ をすべて求めよ。

2　c を 1 より大きい実数とする。また，i を虚数単位として，$\alpha=\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$ とおく。複素数 z に対して，

$$P(z)=z^3-3z^2+(c+2)z-c,\quad Q(z)=-\alpha^7z^3+3\alpha^6z^2+(c+2)\alpha z-c$$

と定める。

(1)　方程式 $P(z)=0$ を満たす複素数 z をすべて求め，それらを複素数平面上に図示せよ。

(2)　方程式 $Q(z)=0$ を満たす複素数のうち実部が最大のものを求めよ。

(3)　複素数 z についての 2 つの方程式 $P(z)=0,\ Q(z)=0$ が共通解 β を持つとする。そのときの c の値と β を求めよ。

3　座標空間の 3 点 $\mathrm{A}\,(3,\ 1,\ 3)$，$\mathrm{B}\,(4,\ 2,\ 2)$，$\mathrm{C}\,(4,\ 0,\ 1)$ の定める平面を H とする。また，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}\quad (s,\ t \text{ は非負の実数})$$

を満たすすべての点 P からなる領域を K とする。

(1)　内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を求めよ。

(2)　原点 $\mathrm{O}\,(0,\ 0,\ 0)$ から平面 H に下ろした垂線の足を Q とする。$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表せ。

(3)　領域 K 上の点 P に対して，線分 QP 上の点で $\overrightarrow{\mathrm{AR}}=r\overrightarrow{\mathrm{AC}}$（$r$ は非負の実数）を満たす点 R が存在することを示せ。

(4)　領域 K において原点 O からの距離が最小となる点 S の座標を求めよ。

4　袋の中にいくつかの赤玉と白玉が入っている。すべての玉に対する赤玉の割合を p $(0\leqq p\leqq 1)$ とする。袋から無作為に玉を一つ取り出して袋に戻す試行を行う。試行を n 回行うとき，赤玉を k 回以上取り出す確率を $f(k)$ とおく。

(1)　$n\geqq 2$ に対して，$f(1)$ と $f(2)$ を求めよ。

(2)　$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$ に対して，等式

$$f(k)=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\int_0^p x^{k-1}(1-x)^{n-k}\,dx$$

を示せ。

(3)　自然数 k に対して，定積分

$$I=\int_0^{\frac{1}{2}} x^k(1-x)^k\,dx$$

を求めよ。